त्रिकोणमिति
राजेन्द्र स्वरूप गुप्त

त्रिकोणमिति

विज्ञप्ति

हिन्दी समिति ग्रन्थमाला--संख्या---११२

त्रिकोणमिति

(डिग्री तथा आनर्स कक्षाओं के लिए)

लेखक
राजेन्द्र स्वरूप गुप्त
प्राध्यापक, गणित विभाग
इलाहाबाद विश्वविद्यालय
इलाहाबाद

हिन्दी समिति
सूचना विभाग, उत्तर प्रदेश
लखनऊ

प्रस्तावना

इस पुस्तक को पाठ्य पुस्तक के रूप में प्रस्तुत करते समय यह ध्येय रहा है कि विश्वविद्यालयों में पढ़ने वाले डिग्री तथा ऑनर्स के छात्रों के लिए यह उपयोगी सिद्ध हो। हिन्दी में अभी तक इस प्रकार की पुस्तकों का अभाव है और जब इंटरमीडियेट तक की कक्षाओं में पढ़ाई का माध्यम हिन्दी हो गया है तो यह और आवश्यक हो जाता है कि डिग्री कक्षाओं के लिए भी हिन्दी में कोई उपयोगी पुस्तक हो जिससे छात्रों को असुविधा न हो। अतः यह पुस्तक उस अभाव की भी पूर्ति करती है। विषय को सूक्ष्म तथा सरल रीति से प्रस्तुत किया गया है तथा अनावश्यक बातों पर बल नहीं दिया गया है परन्तु साथ ही साथ इस बात का भी ध्यान रखा गया है कि विषय का विवेचन गूढ़ तथा आधुनिक रहे।

त्रिकोणमिति के तथा इस पुस्तक में प्राप्त महत्त्वपूर्ण सूत्रों तथा फलों की सूची पुस्तक के अन्त में ही दे दी गयी है जिससे तुरंत निर्देशन में सुगमता हो। दृष्टांत के लिए अधिक संख्या में आदर्शभूत उदाहरण हल किये गये हैं। अधिकतर उदाहरणों को विभिन्न परीक्षाओं के प्रश्न पत्रों से लिया गया है एवं उनको क्रम में रखने का प्रयत्न भी किया गया है।

मैं अपने मित्र श्री योगेन्द्र बिहारी लाल माथुर तथा श्री विक्रमजीत श्रीवास्तव का अत्यन्त आभारी हूँ जिन्होंने इस पुस्तक के लिखने में मुझे महत्त्वपूर्ण सुझाव दिये हैं।

सक्रिय आलोचना तथा सुझावों का मैं सहर्ष स्वागत करूँगा।

राजेन्द्र स्वरूप गुप्त

प्रकाशकीय

विश्वविद्यालयों के डिग्री तथा आनर्स के छात्रों के लिए त्रिकोणमिति जैसे विषय का वड़ा ही महत्त्व है। आवश्यकता इस बात की है कि इस विषय का विवेचन इस ढंग से किया जाय कि उससे छात्रों की आवश्यकताओं की पूर्ति हो सके तथा वह सरल और बोधगम्य वन सके जिससे उन्हें कोई असुविधा न हो। इस पुस्तक को इन्हीं बातों को ध्यान में रखते हुए प्रस्तुत किया गया है। इसमें अनावश्यक बातों पर वल न देकर विषय को संक्षिप्त एवं सरल रीति से समझाया गया है किन्तु साथ ही इस वात का भी ध्यान रखा गया है कि विषय का विवेचन गूढ़ और आधुनिक रहे। छात्रों की सुविधा के लिए इसमें उदाहरण के रूप में आदर्श हल समाविष्ट किये गये हैं। इनमें से अधिकांश उदाहरण विभिन्न परीक्षाओं के प्रश्न-पत्रों से लिए गये हैं। जिससे इसकी उपयोगिता और अधिक बढ़ जाती है।

आशा है, विश्वविद्यालयों के छात्रों के लिए हिन्दी के माध्यम से त्रिकोणमिति जैसे विषय को हृदयंगम कराने में यह पुस्तक अत्यन्त उपयोगी पाठचपुस्तक सिद्ध होगी।

सुरेन्द्र तिवारी
सचिव, हिन्दी समिति

विषय सूची

अध्याय १

प्रतिलोम वृत्तुल फलन

अध्याय २

मिश्र काल्पनिक राशियाँ तथा द-मायवर का प्रमेय

अध्याय ३

त्रिकोणमितीय फलनों का विस्तार

अध्याय ४

समीकरण के हल

अध्याय ५

मिश्र काल्पनिक राशियों के त्रिकोणमितीय एवं घातीय फलन

अध्याय ६

अतिपरवलयिक फलन

अध्याय ७

अध्याय ८

अध्याय ९

अध्याय १०

गुणन खंड

अध्याय १

प्रतिलोम वृत्तुल फलन

1.01 **प्रतिलोम फलन**––यदि समीकरण $y=f(x)$ चल राशि x के किसी फलन को स्पष्ट रूप में व्यक्त करे, तो यही समीकरण x को y के अस्पष्ट फलन के रूप में भी व्यक्त करेगा। ये दोनों फलन एक दूसरे के प्रतिलोम फलन कहलाते हैं।

उदाहरण के लिये $y=3x+8$ फलन $x=\frac{1}{3}(y-8)$ के तुल्य है। ये दोनों फलन अर्थात् $y=3x+8$ तथा $x=\frac{1}{3}(y-8)$ एक दूसरे के प्रतिलोम हैं।

यदि $y=f(x)$, तो x को $f^{-1}(y)$ से इंगित करते हैं।

अनेक प्रतिलोम फलन बहुमान होते हैं जैसे. यदि

$$\sin\theta=\sin x\,,$$

तो $$\theta=n\pi+(-1)^n x\,,$$

तथा यदि $$\cos\theta=\cos x$$

तो $$\theta=2n\pi\pm x\,,$$

जहाँ n कोई भी पूर्ण संख्या है।

इस प्रकार यदि

$$\sin\theta=x$$

तो $$\sin^{-1}x=n\pi+(-1)^n\theta$$

जिससे $\sin^{-1}x$ का मुख्य मान θ है जो n को शून्य रखने पर प्राप्त होता है।

किसी प्रतिलोम फलन का अल्पतम संख्यात्मक मान उसका मुख्य मान कहलाता है एवं f^{-1} से हमारा आशय साधारणतः उसके मुख्य मान से होता है।

1.02 प्रतिलोम वृत्तुल फलन—प्रतिलोम वृत्तुल फलनों की परिभाषा हम निम्न रूप से देते हैं ।

यदि $y = \cos x$, तो $x = \cos^{-1} y$,

यदि $y = \sin x$, तो $x = \sin^{-1} y$,

यदि $y = \tan x$, तो $x = \tan^{-1} y$.

उपर्युक्त समीकरणों में y एक संख्या है जो क्रमशः कोण x के cosine, sine तथा tangent के बराबर है. किन्तु $\cos^{-1} y$, $\sin^{-1} y$ तथा $\tan^{-1} y$ वे न्यूनतम धनात्मक कोण हैं जिनके cosine, sine तथा tangent प्रत्येक y के बराबर हैं।

$\cos^{-1} y$ का मान $(\cos y)^{-1}$ अर्थात् $\sec y$ से सर्वथा भिन्न है। $\cos^{-1} y$ को प्रतिलोम $\cos y$ कहते हैं ।

यदि प्रतिलोम फलनों द्वारा व्यक्त कोणों के संबंध में कुछ निर्देशन हो तो $\sin^{-1} x$, $\operatorname{cosec}^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ तथा $\cot^{-1} x$ से उन कोणों का आशय है जो $-\pi/2$ तथा $+\pi/2$ के मध्य हैं अर्थात् यदि कोण θ हो तो

$$-\pi/2 < \theta < \pi/2,$$

और $\cos^{-1} x$ तथा $\sec^{-1} x$ उन कोणों को सूचित करते हैं जो 0 तथा π के मध्य हैं अर्थात्

$$0 < \theta < \pi.$$

1·03 उपर्युक्त से स्पष्ट है कि

$$\theta = \sin^{-1}(\sin \theta) = \sin(\sin^{-1} \theta)$$

क्योंकि यदि $\sin \theta = x$,

तो $\theta = \sin^{-1} x = \sin^{-1}(\sin \theta)$, x का मान रखने पर ।

अब यदि $\sin^{-1} \theta = y$,

तो $\theta = \sin y = \sin(\sin^{-1} \theta)$, y का मान रखने पर ।

अत: $\theta = \sin^{-1}(\sin\theta) = \sin(\sin^{-1}\theta)$.

इसी प्रकार $\theta = \cos^{-1}(\cos\theta) = \cos(\cos^{-1}\theta)$,

तथा $\theta = \tan^{-1}(\tan\theta) = \tan(\tan^{-1}\theta)$.

पुन: $\operatorname{cosec}^{-1} x = \sin^{-1}(1/x)$

क्योंकि यदि $\operatorname{cosec}^{-1} x = \theta$

तो $x = \operatorname{cosec}\theta$

या $1/x = \sin\theta$

जिससे $\theta = \sin^{-1}(1/x)$.

अत: $\theta = \operatorname{cosec}^{-1} x = \sin^{-1}(1/x)$.

इसी प्रकार $\cot^{-1} x = \tan^{-1}(1/x)$,

तथा $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$.

1.04 प्रतिलोम वृतुल फलनों के कुछ प्रमुख परिणाम—

(i) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$,

(ii) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2$,

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \pi/2$

परिणाम (i) को सिद्ध करने के लिये मान लिया कि

$$\sin^{-1} x = \theta, \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

तब $\sin\theta = x$.

हमें विदित है कि

$$\sin\theta = \cos(\pi/2 - \theta),$$

अत: $x = \sin\theta = \cos(\pi/2 - \theta)$.

$$\therefore \quad \cos^{-1} x = \pi/2 - \theta \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

अब समीकरण (1) और (2) के योग से

$$\sin^{-1} x+\cos^{-1} x=\pi/2.$$

यह स्मरण रखना चाहिए कि यहाँ x धनात्मक है तथा प्रतिलोम फलनों के मान उनके मुख्य मान हैं।

इसी प्रकार परिणाम (ii) तथा (iii) भी सिद्ध हो सकते हैं।

१.०५ अन्य परिणाम—

(i) $\sin^{-1}A \pm \sin^{-1} B=\sin^{-1} [A\sqrt{(1-B^2)}\pm B\sqrt{(1-A^2)}]$,

(ii) $\cos^{-1}A\pm \cos^{-1}B=\cos^{-1} [AB\mp\sqrt{(1-A^2)}\sqrt{(1-B^2)}]$,

(iii) $\tan^{-1}A\pm \tan^{-1}B=\tan^{-1} [(A\pm B)/(1\mp AB)]$.

परिणाम (i) को सिद्ध करने के लिए. मान लिया कि

$\sin^{-1}A=x$, तथा $\sin^{-1}B=y$ .. .. (1)

जिससे $\sin x=A$, तथा $\sin y=B$ .. .. (2)

तथा $\cos x = \sqrt{(1-A^2)}$ तथा $\cos y= \sqrt{1-B^2)}$ .. (3)

अब $\sin (x\pm y)=\sin x \cos y\pm\cos x \sin y$

$$= A\sqrt{(1-B^2)} \pm B \sqrt{(1-A^2)}$$

(२) तथा (३) से विभिन्न मानों को स्थानापत्ति करने पर।

$$\therefore \quad x\pm y=\sin^{-1} [A \sqrt{(1-B^2)}\pm B \sqrt{(1-A^2)}]$$

अर्थात् $\sin^{-1}A\pm\sin^{-1}B=\sin^{-1} [A \sqrt{(1-B^2)} \pm B\sqrt{(1-A^2)}]$.

परिणाम (ii) को सिद्ध करने के लिए, मान लिया कि

$\cos^{-1}A=x$, तथा $\cos^{-1}B=y$,

जिससे $\cos x = A$, तथा $\cos y= B$,

तथा $\sin x=\sqrt{(1-A^2)}$ तथा $\sin y= \sqrt{(1-B^2)}$.

अब $\cos (x\pm y)=\cos x \cos y \mp \sin x \sin y$,

$$=A B \mp \sqrt{(1-A^2)} \sqrt{(1-B^2)}.$$

विभिन्न मानों की स्थानापत्ति करने पर।

$$\therefore \quad x\pm y=\cos^{-1} [AB \mp \sqrt{(1-A^2)} \sqrt{(1-B^2)}$$

अर्थात् $\cos^{-1}A\pm\cos^{-1}B=\cos^{-1}[AB\mp\sqrt{(1-A^2)}\sqrt{(1-B^2)}]$.

परिणाम (iii) को सिद्ध करने के लिए, मान लिया कि

$\tan^{-1}A=x$, तथा $\tan^{-1}B=y$,

जिससे $\tan x=A$, तथा $\tan y=B$.

अब $$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x \pm \tan y}{1\mp \tan x \tan y},$$

$$=\frac{A\pm B}{1\mp AB}.$$

$$\therefore \quad x\pm y=\tan^{-1}\left[\frac{A\pm B}{1\mp AB}\right]$$

अर्थात् $$\tan^{-1}A\pm\tan^{-1}B=\tan^{-1}\left[\frac{A\pm B}{1\mp AB}\right].$$

उप-सिद्धान्त–उपर्युक्त परिणामों में $A=B$ रखने पर हमें निम्न फल प्राप्त होंगे

(i) $2\sin^{-1}A=\sin^{-1}[2A\sqrt{(1-A^2)}]$,

(ii) $2\cos^{-1}A=\cos^{-1}[2A^2-1]$,

(iii) $2\tan^{-1}A=\tan^{-1}[2A/(1-A^2)]$.

उदाहरण १। सिद्ध करो

$$\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}.$$

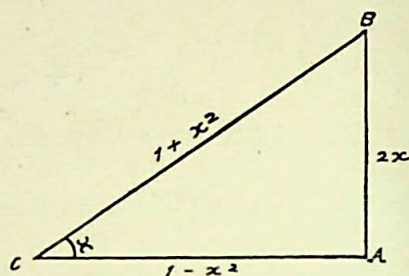
मान लिया कि $\tan\theta=x$,

तब $$\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=\tan^{-1}\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$
$$=\tan^{-1}(\tan 2\theta)$$
$$=2\theta.$$

पुन: $$\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\sin^{-1}\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta},$$
$$=\sin^{-1}\frac{2\tan\theta}{\sec^2\theta},$$
$$=\sin^{-1}(\sin 2\theta),$$
$$=2\theta.$$

अत: $$\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}.$$

इस परिणाम की पुष्टि ज्यामितीय विधि द्वारा इस प्रकार की जा सकती है।

मान लें $\tan \alpha = \dfrac{2x}{1-x^2}$

तब समकोण त्रिभुज में भुजाएँ BA तथा CA क्रमश: $2x$ तथा $(1-x^2)$ की अनुपाती होंगी, तथा भुजा BC, $(1+x^2)$ की अनुपाती होगी। अतएव चित्र से स्पष्ट है कि

$$\sin \alpha = \frac{2x}{1+x^2}, \text{ तथा } \cos \alpha = \frac{1-x^2}{1+x^2},$$

जिससे
$$\sin^{-1}\left[\frac{2x}{1+x^2}\right] = \alpha = \tan^{-1}\left[\frac{2x}{1-x^2}\right]$$
$$= \cos^{-1}\left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right].$$

उदाहरण २। सिद्ध करो

$$2\tan^{-1}\tfrac{1}{3} + \tan^{-1}\tfrac{1}{7} = \frac{\pi}{4}.$$

हमें ज्ञात हैं कि

$$2\tan^{-1}\tfrac{1}{3} = \tan^{-1}\left\{\frac{2/3}{1-1/9}\right\}$$
$$= \tan^{-1}(3/4)$$

अत: $2\tan^{-1}\tfrac{1}{3} + \tan^{-1}\tfrac{1}{7} = \tan^{-1}\tfrac{3}{4} + \tan^{-1} 1/7$

$$= \tan^{-1}\frac{3/4+1/7}{1-\frac{3}{4}.\frac{1}{7}},$$

$$= \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

उदाहरण ३। सिद्ध करो

$$4 \tan^{-1} \tfrac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

हमें विदित है कि

$$2 \tan^{-1} \tfrac{1}{5} = \tan^{-1} \left\{\frac{2/5}{1-1/25}\right\}$$

$$= \tan^{-1} (5/12)$$

अतएव

$$4 \tan^{-1} \tfrac{1}{5} = 2 \tan^{-1} \left(\frac{5}{12}\right)$$

$$= \tan^{-1} \left\{\frac{2.5/12}{1-\frac{25}{144}}\right\}$$

$$= \tan^{-1} \frac{120}{119}$$

$$\therefore 4 \tan^{-1} \tfrac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239} = \tan^{-1} \frac{120}{119} - \tan^{-1} \frac{1}{239}$$

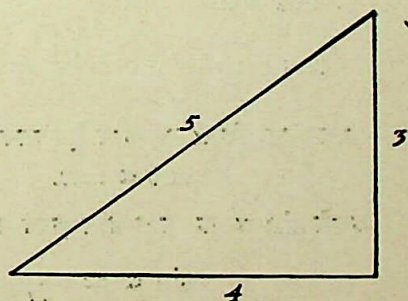
$$= \tan^{-1} \left[\left\{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}\right\} \Big| \left\{1 + \frac{120}{119.239}\right\}\right]$$

$$= \tan^{-1} \left[\left\{\frac{28561}{119.239}\right\} \Big| \left\{\frac{28561}{119.239}\right\}\right]$$

$$= \tan^{-1} (1) = \pi/4.$$

उदाहरण ४। सिद्ध करो

$$\cos^{-1} \tfrac{4}{5} + \tan^{-1} \tfrac{3}{5} = \text{tsn}^{-1} \frac{27}{11}$$

$\cos^{-1}\frac{4}{5}$ को हम प्रतिलोम tangent के रूप में व्यक्त कर सकते हैं और इसका मान $\tan^{-1} \frac{3}{4}$ होगा जैसा कि चित्र से स्पष्ट है।

अतः $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{3}{4}+\tan^{-1}\frac{3}{5}$

$$=\tan^{-1}\left\{\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}}\right\}$$

$$=\tan^{-1}\left\{\frac{27}{20}\Big/\frac{11}{20}\right\}$$

$$=\tan^{-1}\frac{27}{11}.$$

१.०६ त्रिकोणमितीय प्रतिलोम फलनों के विवेचन में यह ध्यान देने योग्य है कि विविध फलनों में स्थापित सम्बन्धों के संगत इनके प्रतिलोम फलनों में भी संबंध स्थापित किये जा सकते हैं।

उदाहरण के लिए हमें ज्ञात है कि

$$\tan 3\theta=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta},$$

$$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta,$$

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta.$$

इनमें $\tan\theta$, $\sin\theta$, $\cos\theta$ को प्रत्येक बार x के बराबर रखने पर, हमें निम्न तीन प्रतिलोम सम्बन्ध प्राप्त होंगे —

$$3\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2},$$

$$3\sin^{-1}x=\sin^{-1}[3x-4x^3],$$

तथा $$3\cos^{-1}x=\cos^{-1}[4x^3-3x].$$

विविध उदाहरण

१. सिद्ध करो

$$\cos\tan^{-1}\sin\cot^{-1}x=\sqrt{\left\{\frac{(x^2+1)}{(x^2+2)}\right\}}.$$

मान लिया कि α वह कोण है जिसका cotangent x के बराबर है, अर्थात्

$$\cot\alpha=x.$$

इससे $\sin\alpha$ का मान ज्ञात करने पर हमें प्राप्त है

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

अर्थात् $\sin(\cot^{-1}x) = \sin\sin^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}\right\}$

$$= 1/\sqrt{(1+x^2)}.$$

पुनः मान लिया कि θ यह कोण है जिसका tangent, $\sin\cot^{-1}x$ या $\sin\alpha$ के बराबर है अर्थात्

$$\tan^{-1}\sin\cot^{-1}x = \theta$$

या $\tan\theta = \sin\cot^{-1}x = \sin\alpha$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}, \text{ उपर्युक्त से ।}$$

इससे $\cos\theta$ का मान ज्ञात करने पर हमें प्राप्त है

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{(x^2+1)}}{\sqrt{(x^2+2)}}.$$

अर्थात् $\cos\tan^{-1}\sin\cot^{-1}x = \frac{\sqrt{(x^2+1)}}{\sqrt{(x^2+2)}}$.

२. सिद्ध करो

$$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}.$$

मान लिया कि $\tan^{-1}x = \alpha$, $\tan^{-1}y = \beta$, $\tan^{-1}z = \gamma$

जिससे $\tan\alpha = x$, $\tan\beta = y$, $\tan\gamma = z$.

अब हमें विदित है कि

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta}$$

या $\alpha+\beta+\gamma = \tan^{-1}\left[\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta}\right]$

इसमें α, β, γ के लिये स्थानापत्ति करने पर

$$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \tan^{-1}\left\{\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}\right\}.$$

यदि $x=y=z$ हो तो

$$3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$$

जैसा कि हम § १·०६ में दिखा चुके हैं ।

३. सिद्ध करो

$$\tan^{-1}[\{\sqrt{(1+x^2)}-1\}/x]=\tfrac{1}{2}\tan^{-1}x.$$

मान लिया कि $x = \tan\theta$.

तब $\tan^{-1}[\{\sqrt{(1+x^2)}-1\}/x]$

$$= \tan^{-1}[\{\sqrt{(1+\tan^2\theta)}-1\}/\tan\theta]$$
$$= \tan^{-1}[(\sec\theta-1)/\tan\theta]$$
$$= \tan^{-1}[(1-\cos\theta)/\sin\theta]$$
$$= \tan^{-1}[\tan\tfrac{1}{2}\theta]$$
$$= \tfrac{1}{2}\theta=\tfrac{1}{2}\tan^{-1}x.$$

४. हल करो

$$\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}+\sin^{-1}\frac{2b}{1+b^2}=2\tan^{-1}x.$$

हमें विदित है कि

$$\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}=\tan^{-1}\frac{2a}{1-a^2}=2\tan^{-1}a,$$

तथा $$\sin^{-1}\frac{2b}{1+b^2}=\tan^{-1}\frac{2b}{1-b^2}=2\tan^{-1}b.$$

अतः समीकरण को निम्न रूप में भी लिख सकते हैं

$$2\tan^{-1}a+2\tan^{-1}b=2\tan^{-1}x,$$

अथवा $$\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}x,$$

अथवा $$\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}=\tan^{-1}x.$$

$$\therefore x=\frac{a+b}{1-ab}$$

५. हल करो

$$\tan^{-1}\tfrac{1}{3}+\tan^{-1}\tfrac{1}{5}+\tan^{-1}\tfrac{1}{7}+\tan^{-1}y=\pi/4.$$

हमें विदित है कि

$$\tan^{-1}\tfrac{1}{3}+\tan^{-1}\tfrac{1}{5}+\tan^{-1}\tfrac{1}{7}=\tan^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}\right]$$
$$=\tan^{-1}(7/9).$$

समीकरण के वाम पक्ष में उपर्युक्त मान रखने पर हमें प्राप्त है

$$\tan^{-1}\tfrac{7}{9}+\tan^{-1}y=\pi/4$$

या $$\tan^{-1}\frac{\frac{7}{9}+y}{1-\frac{7}{9}.y}=\pi/4$$

या $$\frac{7+9y}{9-7y}=\tan\pi/4=1$$

अतः $7+9y=9-7y,$

जिससे $16y=2,$

अर्थात् $y=1/8$.

6. यदि $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$, सिद्ध करो कि

$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1.$$

हमें विदित है कि

$$\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\cos^{-1}[xy-\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(I-y^2)}].$$

अतः समीकरण को निम्न रूप में रख सकते हैं

$$\cos^{-1}[xy-\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-y^2)}]=\pi-\cos^{-1}z$$

या $xy-\sqrt{\{(1-x^2)(1-y^2\}},=\cos(\pi-\cos^{-1}z)$

$$=\cos\pi\cos\cos^{-1}z+\sin\pi\sin\cos^{-1}z=-z$$

अर्थात् $xy+z=\sqrt{\{(1-x^2)(1-y^2)\}}$

दोनों पक्षों का वर्गीकरण करने पर

$$(xy+z)^2=(1-x^2)(1-y^2)$$

या $x^2y^2+z^2+2xyz=1-x^2-y^2+x^2y^2$

अर्थात् $x^2+y^2+z^2+2xyz=1.$

अध्याय १ पर उदाहरण

सिद्ध करो

1. $2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+2\tan^{-1}\frac{1}{8}=\pi/4.$
2. $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{70}+\tan^{-1}\frac{1}{99}=\pi/4.$
3. $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\pi/2.$

4. $\tan^{-1}\left(\frac{2A-B}{B\sqrt{3}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2B-A}{A\sqrt{3}}\right)=\pi/3.$

5. यदि $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi/2$, तो सिद्ध करो कि

$$yz+zx+xy=1.$$

6. यदि $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$, तो $x^2+y^2+z^2+2xyz$ का मान बताओ। [इलाहाबाद १९२३]

7. सिद्ध करो कि

$$\tan^{-1}(\tfrac{1}{2}\tan 2A)+\tan^{-1}(\cot A)+\tan^{-1}(\cot^3 A)=0,$$

8. यदि A, B, C किसी त्रिभुज के कोण हों तो दिखाओ कि

$$\tan^{-1}(\cot B.\cot C)+\tan^{-1}(\cot C.\cot A)+\tan^{-1}(\cot A.\cot B)$$
$$=\tan^{-1}\left[1+\frac{8\cos A.\cos B.\cos C}{\sin^2 2A+\sin^2 2B+\sin^2 2C}\right].$$

9. निम्न संबंध को प्रतिलोम संकेत लिपि में व्यक्त करो

$$\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}.$$

इससे अथवा अन्य प्रकार से सिद्ध करो कि

$$2\tan^{-1}\left\{\sqrt{\left(\frac{A-B}{A+B}\right)}\tan\frac{\theta}{2}\right\}=\cos^{-1}\left\{\frac{B+A\cos\theta}{A+B\cos\theta}\right\}.$$

[इलाहाबाद १९२४; बनारस १९४७]

10. निम्न का मान निकालो

$$\cos 2\{\tan^{-1}x+\tan^{-1}y\}.$$

11. सिद्ध करो कि

$$\tan\left\{\tfrac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\tfrac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right\}=\frac{x+y}{1-xy}.$$

12. यदि $x+y+z=v$, तो दिखाओ कि

$$\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{xv}{yz}\right)}+\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{yv}{zx}\right)}+\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{zv}{xy}\right)}=\pi$$

13. सरल करो

$$\tan^{-1}\frac{A_1X-Y}{A_1Y+X}+\tan^{-1}\frac{A_2-A_1}{A_1A_2+1}+\tan^{-1}\frac{A_3-A_2}{A_2A_3+1}+$$

......n पदों तक।

इसमें $X=Y$ एवं $A_n=2n-1$ रखकर π के लिए एक श्रेणी ज्ञात करो।

हल करो—

14. $\tan^{-1}\frac{1}{4}+2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{6}+\tan^{-1}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{4}$.

[आगरा, १९४२]

15. $\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x}\right)=\tan^{-1}(-7)$.

16. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2x+1}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{4x+1}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{2}{x^2}\right)$.

[आगरा, १९४७]

17. $\sin^{-1}\left(\frac{2A}{1+A^2}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{2B}{1+B^2}\right)-\tan^{-1}x=0$.

18. $\tan^{-1}(\cos x)-\tan^{-1}(2\ \text{cosec}\ x)=0$.

19. $\tan^{-1}(x+y)+\tan^{-1}(x-y)=\tan^{-1}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$.

[भारतीय पुलिस, १९३२]

20. $3\tan^{-1}\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

[आगरा, १९४३]

21. $\sec^{-1}(x/A)-\sec^{-1}(x/B)+\sec^{-1}A-\sec^{-1}B=0$.

22. $\text{cosec}^{-1}x=\text{cosec}^{-1}A+\text{cosec}^{-1}B$.

23. $\tan^{-1}\left(\frac{A}{X}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{B}{X}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{C}{X}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{D}{X}\right)=\frac{\pi}{2}$.

24. $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=\pi/4$.

25. $\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\sec^{-1}\sqrt{(1+a^2)}-2\sec^{-1}\sqrt{(1+b^2)}$.

26. $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}x=\pi/4$.

27. $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{(1+x^2)}-\sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt{(1+x^2)}+\sqrt{(1-x^2)}}=\alpha$.

28. $\cot^{-1}x+\cot^{-1}(n^2-x+1)=\cot^{-1}(n-1)$.

29. सिद्ध करो कि

$$\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z)$$
$$=\cot(\cot^{-1}x+\cot^{-1}y+\cot^{-1}z) .$$

30. x और y का मान ज्ञात करो जब

$$\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\cot^{-1}2y-\cot^{-1}2x=\pi/4 .$$

३१. यदि $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y+\sin^{-1}z=\pi$, सिद्ध करो

$$x\sqrt{(1-x^2)}+y\sqrt{(1-y^2)}+z\sqrt{(1-z^2)}=2xyz .$$

३२. सिद्ध करो

$$2\tan^{-1}[\tan(45^\circ-\alpha)\tan\beta/2]=\cos^{-1}\left[\frac{\sin 2\alpha+\cos\beta}{1+\sin 2\alpha\cos\beta}\right] .$$

अध्याय २

मिश्र काल्पनिक राशियाँ तथा द-मायवर का प्रमेय

२.०१ संख्याओं का वर्गीकरण—समस्त संख्याएँ साधारणतः दो भागों में विभक्त हो सकती हैं—(१) वास्तविक तथा (२) काल्पनिक अथवा मिश्र काल्पनिक। वास्तविक संख्या धनात्मक या ऋणात्मक हो सकती हैं तथा इनके भी दो वर्ग बन सकते है—परिमेय एवं अपरिमेय। परिमेय संख्याओं को किसी भिन्न P/Q के रूप में प्रकट कर सकते हैं; जहाँ P तथा Q पूर्ण संख्या हैं जैसे 2, -4, 5, -9, 3/4, -5/7, 13/90 आदि। अपरिमेय संख्या वे हैं जो पूर्ण संख्याओं की किसी भिन्न द्वारा नहीं प्रकट की जा सकती। ये संख्याएँ पूर्ण संख्याओं के वे मूल हैं जिनका यथार्थ मान नहीं ज्ञात किया जा सकता जैसे $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{3}$. आदि।

वास्तविक सख्याओं का प्रगुण यह है कि ये सब किसी सरल रेखा पर अंकित की जा सकती हैं।

मिश्र काल्पनिक संख्याएँ किसी सरल रेखा पर बिन्दुओं द्वारा अंकित नहीं की जा सकती हैं। ये किसी समतल पर ही विभिन्न बिन्दुओं द्वारा निरूपित की जा सकती हैं। मिश्र काल्पनिक संख्याओं में (-1) के वर्गमूल $\sqrt{-1}$ अथवा चिन्ह i का समावेश रहता है।

२.०२ काल्पनिक एकक (i)—बीजगणित के अधिकतर समीकरणों के मूल वास्तविक संख्या होते हैं। किन्तु अनेक समीकरणों को केवल वास्तविक संख्या द्वारा ही नहीं हल किया जा सकता। उदाहरण के लिये हम सबसे साधारण वर्ग समीकरण अथवा द्विघाती समीकरण

$$x^2+1=0$$

को लें। कोई वास्तविक संख्या इसे संतुष्ट नहीं कर सकती क्योंकि यह निश्चयात्मक रूप से ज्ञात है कि किसी भी वास्तविक संख्या का वर्ग ऋणात्मक नहीं होता।

इस समीकरण के हल को संकेत लिपि में हम इस प्रकार प्रकट कर सकते हैं

$$x=\pm\sqrt{-1}=\pm i,$$

जहाँ ऋणात्मक इकाई के वर्गमूल को i द्वारा भी सूचित करते हैं।

२.०३ मिश्र काल्पनिक राशि—दो वास्तविक राशियां x तथा y से मिल कर बनी हुई $x+iy$ राशि मिश्र काल्पनिक राशि कहलाती है। यदि $y=0$, तो राशि पूर्णतः वास्तविक है, तथा यदि $x=0$, तो राशि पूर्णतः काल्पनिक है।

राशियाँ $x+iy$ एवं $x-iy$ *संयुग्मी समिश्र काल्पनिक राशियाँ* कहलाती हे। यदि iy कोई काल्पनिक राशि है, तो उसकी संयुग्मी काल्पनिक राशि $-iy$ है। $x+iy$ तथा $x-iy$ के गुणनफल x^2+y^2 से स्पष्ट है कि ो संयुग्मी मिश्र काल्पनिक राशियों का गुणनफल पूर्णतया वास्तविक होता है।

२.०४ समान मिश्र काल्पनिक राशियाँ—यदि दो मिश्र काल्पनिक राशियां समान हों, तो उनके वास्तविक एवं अवास्तविक अंश आपस में अलग अलग बराबर होते हैं। जैसे, यदि

$$x+iy = a+ib \tag{1}$$

तो $$x=a, \text{ तथा } y=b \tag{2}$$

क्योंकि (1) से $x-a=i\,(b-y)$,

जिसके वर्गीकरण से $(x-a)^2=-(b-y)^2$

अथवा $(x-a)^2+(b-y)^2=0$.

क्योंकि दो वर्गों का योग शून्य है, अतएव इनमें से प्रत्येक अलग-अलग शून्य होगा, जिससे

$$x-a=0 \text{ तथा } b-y=0$$

अर्थात् $x=a\ ;\ y=b$.

उपर्युक्त से यह परिणाम भी निकलता है कि यदि कोई मिश्र काल्पनिक राशि शून्य है, तो उसके वास्तविक तथा अवास्तविक अंश प्रत्येक शून्य होंगे।

२.०५ अंक-युग्म—यह ध्यान में रखना चाहिये कि $i=\sqrt{(-1)}$ कोई संख्या नहीं है। वास्तव में मिश्र काल्पनिक राशि $x+iy$ केवल एक अंक-युग्म है, जिसमें दो वास्तविक संख्याएँ, x और y, परस्पर एक संकेत चिन्ह i द्वारा संबंधित हैं। राशि $x+iy$ को $[\,x,\,y\,]$ से भी इंगित कर सकते हैं।

काल्पनिक राशियों पर बीज गणितीय क्रियाओं को अंक-युग्म की संकेत लिपि में इस प्रकार व्यक्त करते हैं।

(i) समानता—

$$[\,x,\,y] = [a,\,b],$$

तो $$x=a,\ y=b.$$

(ii) योग—

$$[x, y] \pm [a, b] = [x \pm a, y \pm b].$$

(iii) गुणन—

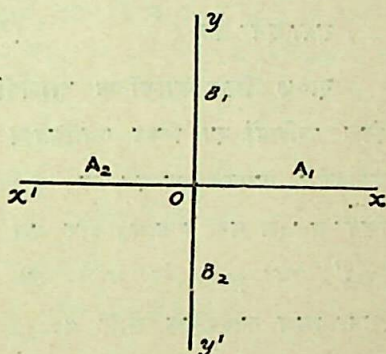
$$[x,y] \times [a, b] = [(xa - yb), (xb + ya)].$$

(iv) भाग—

$$[x,y] \div [a, b] = \left[\frac{xa+yb}{a^2+b^2}, \frac{ya-xb}{a^2+b^2}\right].$$

भाग कि क्रिया गुणन की व्युत्क्रम है और उसकी यह परिभाषा केवल तभी सार्थक है जब भाजक [0, 0] न हो।

२.०६ कारक i -- ऋणात्मक इकाई के काल्पनिक वर्गमूल को हम एक कारक के रूप में भी परिभाषा दे सकते हैं।

मान लें OX तथा OY दो परस्पर लम्ब अक्ष हैं। यदि O से समान दूरी a पर हम विपरीत दिशाओं में दो बिन्दु A_1 तथा, A_2 लें तो बिन्दुओं A_1 तथा A_2 को हम (a) तथा $-1.(a)$ लिख सकते हैं।

यदि हम -1 को एक कारक मान लें, तो उसका गुणा यह होगा कि वह किसी देशित दूरी OA, की दिशा ठीक विपरीत कर देगा। यदि हम i को भी एक कारक मान लें, तो

$$-1 = i^2 = i.i$$

अथवा

$$-1.(a) = i.i\,(a).$$

इसका आशय है कि कारक -1 के प्रयोग का वही फल होता है जो दो बार कारक i के प्रयोग से, अर्थात् केवल एक बार कारक i के प्रयोग से कोई देशित दूरी OA, धनात्मक दिशा में कोण ९०° घूम जाती है, तथा $x-axis$ पर बिन्दु A_1

$y-a$xis के विन्दु B_1 पर आ जाता है। दो वार कारक i के प्रयोग से विन्दु A_1 अपने ठीक विपरीत A_2 पर आ जाता है, तथा तीन वार i के प्रयोग से विन्दु A_1 बिन्दु B_2 पर आ जाता है, एवं अन्ततः i के चार वार प्रयोग से विन्दु A_1 पुनः अपनी स्थिति को लौट आता है।

अतएव i एक कारक है जिसका प्रभाव किसी देशित रेखा की दिशा को धनात्मक रूप से $90°$ घुमा देना है।

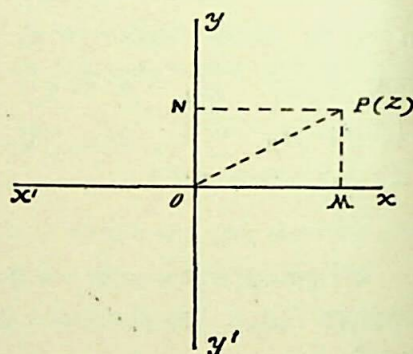
बीजगणित से भी हमें ज्ञात है कि

$$i^2=-1$$

$$i^3=i^2.i=-i$$

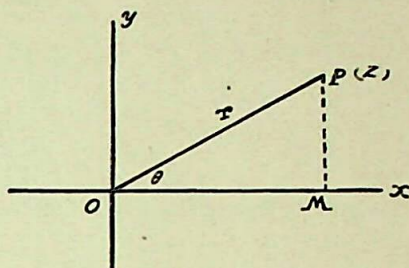
$$i^4=i.i^3=-i^2=1,$$

तथा इसी प्रकार $i^{13}=(i^4)^3.\ i=i$, इत्यादि।

२.०७ मिश्र काल्पनिक राशियों का ज्यामितीय निरूपण—मिश्र काल्पनिक राशियों का निम्न ज्यामितीय प्रतिदर्शन अत्यन्त लाभदायक है। किसी समतल पर दो आयताकार अक्ष xox' तथा yoy' ले लें। तब किसी मिश्र काल्पनिक राशि $z=x+iy$ को विन्दु P से सूचित करते हैं; जिसके निर्देशांक (x,y) हैं। विन्दु P मिश्र काल्पनिक विन्दु (z) भी

कहलाता है, तथा अक्ष xox', yoy' क्रमशः वास्तविक तथा अवास्तविक अक्ष कहलाते हैं। समतल $xyx'y'$ मिश्र काल्पनिक समतल कहलाता है। इस विधि से एक मिश्र काल्पनिक राशि z केवल एक ही विन्दु P से प्रतिदर्शित की जा सकती है। वास्तविक अक्ष $x'ox$ पर विन्दु M केवल वास्तविक राशि x का द्योतक है, तथा इसके विपरीत अवास्तविक अक्ष पर विन्दु N पूर्णतया अवास्तविक राशि iy का सूचक है।

इस चित्र को आरगैंड चित्र कहते हैं।

२.०८ मिश्र काल्पनिक राशियों के मापांक तथा कोणांक—

जिस प्रकार आरगैंड चित्र के मिश्र काल्पनिक विन्दु P (z) के कार्तीय निर्देशांक (x, y) हैं. उसी प्रकार विन्दु P (z) के ध्रुवीय निर्देशांक (r, θ) हैं, जहाँ r, दूरी OP का धनात्मक माप है, तथा θ धनात्मक कोण MOP है।

r को मिश्र काल्पनिक राशि $z=(x+iy)$ का मापांक कहते हैं और उसे $|z|$ अथवा मापांक z लिखते हैं।

कोणांक θ के असंख्य मान होते हैं, जिनमें किसी दो का अन्तर 2π का अपवर्त्य होता है। कोणांक का वह मान जो $-\pi$ तथा π के मध्य होता है, कोणांक θ का मुख्य मान कहलाता है साधारणतयः किसी ज्ञात कोणांक से उसके मुख्य मान का ही आशय होता है।

ऊपर दिये गये दोनों चित्रों की तुलना से मिश्र काल्पनिक विन्दु P (z) के कार्तीय एवं ध्रुवीय निर्देशांकों में निम्न संबंध स्थापित होता है :

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta, \tag{1}$$

अथवा
$$r=\sqrt{(x^2+y^2)}\ ,\ \theta=\tan^{-1}(y/x) \tag{2}$$

जहाँ θ कोणांक का मुख्य मान है।

क्योंकि $z=x+iy$

तथा $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$

अतएव
$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta). \tag{3}$$

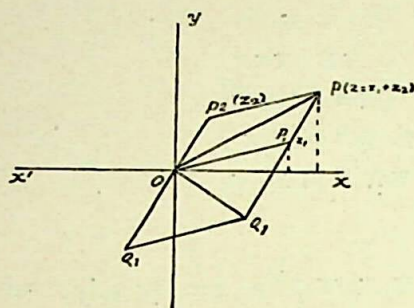
इस प्रकार से मिश्र काल्पनिक राशि z अपने मापांक r तथा कोणांक θ द्वारा व्यक्त की जाती है।

ऑयलर के प्रसिद्ध सूत्र से

$$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$$

अतः मिश्र काल्पनिक राशि $z=re^{i\theta}$. ....(4)

यह सूत्र आगामी अध्याय में सिद्ध किया जायगा।

२.०९ दो मिश्र काल्पनिक राशियों के योग तथा व्यवकलन का ज्यामितीय निरूपण—

मान लिया P_1 तथा P_2 दो मिश्र काल्पनिक राशियाँ $z_1=x_1+iy_1$ तथा $z_2=x_2+iy_2$ को आरगँड चित्र में प्रकट करते हैं।

समानान्तर चतुर्भुज OP_1PP_2, जिसकी आसन्न भुजाएँ OP_1 तथा OP_2 हैं, को पूर्ण किया। हमें विदित है कि भुजा OP का किसी सरल रेखा पर प्रक्षेप भुजाओं OP_1 तथा P_1P के उसी सरल रेखा पर प्रक्षेपों के बीजगणितीय योग के बराबर होता है। अतः OP का x–अक्ष पर प्रक्षेप OP_1 तथा P_1P अर्थात् OP_1 तथा OP_2 के x–अक्ष पर प्रक्षेपों के बीज गणितीय योग के बराबर होगा।

इससे यह स्पष्ट है कि विन्दु P के निर्देशांक $(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$ होंगे। अतः P एक मिश्र काल्पनिक राशि $(x_1+x_2)+i\ (y_1+y_2)$ को प्रकट करता है।

परन्तु
$$z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2),$$
$$=(x_1+x_2)+i\ (y_1+y_2).$$

अतः विन्दु P जो समानांतर चतुर्भुज OP_1PP_2 के कर्ण OP का शीर्ष विन्दु है दो मिश्र काल्पनिक राशियाँ z_1 तथा z_2 के योग को प्रकट करता है।

अब यदि भुजा P_2O को बढ़ाया जाय और उस पर विन्दु Q ऐसा लें कि $OQ=OP_2$, तो Q मिश्र काल्पनिक राशि $-z_2=-x_2-iy_2$ को प्रकट करेगा।

दो मिश्र काल्पनिक राशियों z_1 तथा z_2 का व्यवकलन वही होगा जो दो मिश्र काल्पनिक राशियों z_1 तथा $-z_2$ का योग है अतः उपर्युक्त की भांति समा-

नान्तर चतुर्भुज के नियम से हमें बिन्दु Q_1 प्राप्त होगा जो $z_1 - z_2$ अर्थात् $(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ को प्रकट करता है।

टिप्पणी १—हमें विदित है कि

$$OP \not> OP_1 + P_1P_2,$$

अर्थात् $$OP \leqslant OP_1 + OP_2.$$

$$\therefore \quad |z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

इसी प्रकार हम दिखा सकते हैं कि यदि हम मिश्र काल्पनिक राशियाँ $z_1, z_2, \ldots\ldots z_n$ लें तो

$$|z_1+z_2+\ldots\ldots+z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$$

टिप्पणी २— मान लिया $|z_1| > |z_2|$,

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2|$$

अतः उपर्युक्त से

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2|$$

$$\therefore \quad |z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

इसी प्रकार यदि $|z_2| > |z_1|$, तो

$$|z_1 - z_2| \geq |z_2| - |z_1|$$

$$\therefore |z_1 - z_2| \geq |z_1| \sim |z_2|.$$

२.१० दो मिश्र काल्पनिक राशियों के गुणनफल तथा भजनफल का ज्यामितीय निरूपण—

मान लिया $$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
तथा $$z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$$

$$\begin{aligned}\text{(i)}\ z_1 z_2 &= (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) \\ &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + \sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}.\end{aligned}$$

अतः दो मिश्र काल्पनिक राशियों के गुणनफल का मापाँक उन राशियों के मापाँकों के गुणनफल के बराबर होता है

अर्थात् $$|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$$

और मिश्र काल्पनिक राशियों के गुणनफल का कोणाँक उन राशियों के कोणाँकों के योग के बराबर होता है जहाँ कोणाँक का मुख्य मान ही लिया गया है।

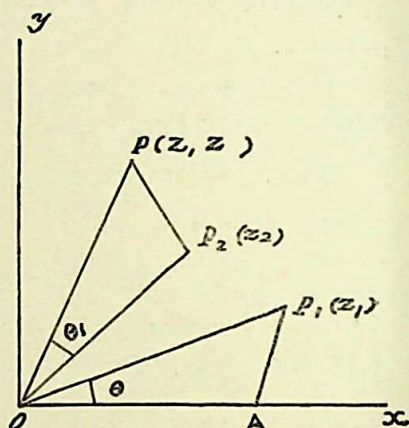
अर्थात् कोणांक $[z_1 z_2]$ = कोणांक $[z_1]$ + कोणांक $[z_2]$.

यदि मुख्य मान न लें तो

कोणांक $[z_1 z_2]$ = कोणांक $[z_1]$ + कोणांक $[z_2]$ $+ 2n\pi$ जहाँ n एक घनात्मक पूर्ण संख्या है।

गुणनफल $z_1 z_2$ को आरगैंड चित्र में निम्न रूप से प्रकट करते हैं।

मान लिया P_1 तथा P_2 विन्दु z_1 तथा z_2 को प्रकट करते हैं अर्थात् $OP_1 = r_1$ तथा $OP_2 = r_2$ एवं $\angle P_1OX = \theta_1$, तथा $\angle P_2OX = \theta_2$. OX पर विन्दु A ऐसा लिया कि OA इकाई के बराबर हो अर्थात् $OA = 1$.

अब त्रिभुज P_2OP ऐसा बनाया कि वह त्रिभुज P_1OA के समरूप हो तो स्पष्ट है कि

$$\frac{OP}{OP_1} = \frac{OP_2}{OA}, \qquad \angle P_1OA = \angle POP_2 = \theta_1$$

$$\therefore OP = OP_1 \times OP_2 = r_1 \times r_2$$

क्योंकि $OA = 1$

तथा
$$\angle POX = \angle POP_2 + \angle P_2OX$$
$$= \theta_1 + \theta_2.$$

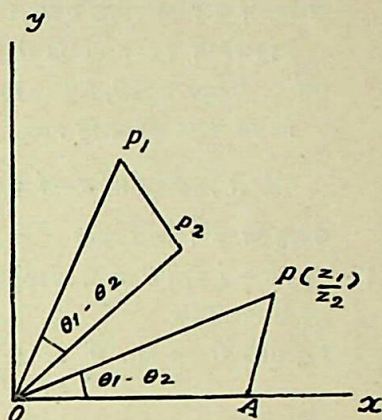
अतः विन्दु P आरगैंड चित्र में गुणनफल $z_1 z_2$ को प्रकट करता है।

(ii)
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)},$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\,\frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2},$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\left\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right\}.$$

अतः दो मिश्र काल्पनिक राशियों के भजनफल का मापाँक उन राशियों के मापाँकों के भजनफल के बरावर होता है और उनके भजनफल का कोणांक उन राशियों के कोणांकों का अन्तर होता है जहाँ कोणांकों का मुख्य मान ही लिया गया है।

भजनफल (z_1/z_2) को आरगैंड चित्र में निम्नरूप में प्रकट करते हैं।

पहले की ही भांति मान लिया P_1, P_2 तथा A क्रमशः z_1, z_2 तथा इकाई अर्थात् 1 को प्रकट करते हैं।

अब त्रिभुज OAP ऐसा बनाया कि वह त्रिभुज P_1OP_2 के समरूप हो तो स्पष्ट है कि

$$\frac{OP}{OA} = \frac{OP_1}{OP_2} \qquad \angle P_1OP_2 = \angle POA = \theta_1 - \theta_2$$

$$\therefore\ OP = \frac{OP_1}{OP_2} \cdot OA = \frac{r_1}{r_2}$$

और $\angle POA = \theta_1 - \theta_2$

अतः बिन्दु P आरगैंड चित्र में भजनफल (z_1/z_2) को प्रकट करता है।

उदाहरण १। मिश्र काल्पनिक राशि $1 + i\sqrt{3}$ का मापाँक तथा कोणाँक निकालो।

मान लिया $1 + i\sqrt{3} = r\ (\cos\theta + i \sin\theta)$

तब $1 = r \cos\theta,$ ....(1)

तथा $\sqrt{3} = r \sin\theta$ ....(2)

(1) और (2) के वर्गों के योग से

$$r^2 = 1 + 3 = 4$$

अतः मापाँक $r = 2.$

पुनः (2) को (1) से भाग देने पर

$$\tan\theta=\sqrt{3},$$

अतः कोणाँक $\theta=\tan^{-1}\sqrt{3}=\pi/3.$

उदाहरण २। काल्पनिक एकक i का मापाँक तथा कोणांक ज्ञात करो ।

मान लिया $i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

तब $\quad 0=r\cos\theta, \qquad 1=r\sin\theta.$

जिससे पहले की भांति $r=1$, तथा $\theta=\pi/2.$

यह भी सिद्ध करो कि $-i=\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}.$

उदाहरण ३। सिद्ध करो

$$1-\cos\theta-i\sin\theta=2\sin\tfrac{1}{2}\theta\,[\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\pi)+i\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\pi)]$$

हम जानते हैं कि

$$\begin{aligned}1-\cos\theta-i\sin\theta &= 2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta-2i\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta,\\ &= 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\,[\sin\tfrac{1}{2}\theta-i\cos\tfrac{1}{2}\theta]\\ &= 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\,[\cos\phi+i\sin\phi],\end{aligned}$$

जहाँ ϕ एक ऐसा कोण है कि

$$\sin\tfrac{1}{2}\theta=\cos\phi, \text{ तथा } -\cos\tfrac{1}{2}\theta=\sin\phi.$$

इन प्रतिवन्धों से $\phi=\frac{1}{2}(\theta-\pi)$

अतएव

$$1-\cos\theta-i\sin\theta=2\sin\tfrac{1}{2}\theta\,[\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\pi)+i\sin\tfrac{1}{2}(\theta-\pi)].$$

उदाहरण ४। आरगैंड चित्र में विन्दु A, P, B क्रमशः मिश्र काल्पनिक राशियों $2, z, z^2$ के द्योतक हैं । यदि विन्दु P रेखा OA को व्यास मान कर खींचे वृत्त पर रहे तो B का विन्दु पथ ज्ञात करो [इलाहावाद, १९५२]

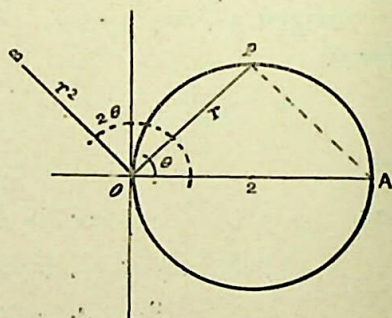
मान लें कि $P=z$

$$=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

जिससे $OP=r$, तथा $\angle AOP=\theta.$

तब $B=z^2=r^2(\cos\theta+i\sin\theta)^2$

$$=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta).$$

अतः $OB=r^2$, तथा $\angle AOB=2\theta$

अर्थात् यदि B के ध्रुवीय निर्देशाँक (R, Θ) हों, तो

$$R=r^2, \quad \Theta=2\theta.$$

क्योंकि विन्दु P वृत्त पर स्थित रहता है, अतः

$$OP=r=2\cos\theta$$

या $$r^2=4\cos^2\theta=2(1+\cos 2\theta).$$

$\therefore$ $$R=2(1+\cos\Theta).$$

अतएव B का विन्दु पथ एक हृदयाभ है, जिसका समीकरण है

$$r=2(1+\cos\theta).$$

उदाहरण

1. यदि $x+iy=3/[2+\cos\theta+i\sin\theta]$, तो सिद्ध करो कि
$$(x-1)(x-3)+y^2=0.$$

2. यदि $a^2+b^2=1$, सिद्ध करो कि
$$\frac{1+b+ia}{1+b-ia}=b+ia.$$

3. दिखाओ कि
$$\frac{1+\sin\theta-i\cos\theta}{1-\sin\theta-i\cos\theta}=i(\sec\theta+\tan\theta).$$

निम्न को $a+ib$ के रूप में व्यक्त करो।

4. $\dfrac{3+5i}{-1+i}$, $\dfrac{5(5+i)}{(2+i)(1-i)}$, $\dfrac{2+7i}{-i}$.

5. $(1+i)^2/(1-i)$.

6. $(2+3i)(3-4i)$.

7. $(x+\sin\theta+i\cos\theta)(x+\sin\theta-i\cos\theta)$.

8. $(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)/(\cos\theta-i\sin\theta)$.

9. निम्न की संयुग्मी राशि ज्ञात करो—
$$(2-i)/(1-2i)^2.$$

निम्न के मापाँक एवं कोणांक ज्ञात करो—

10. $1+i$

11. $-1+i\sqrt{3}$

12. $\sqrt{2}+1-i$

13. $1+\cos\theta-i\sin\theta.$

14. समीकरण $1+\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$+\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=0$$

का ज्यामितीय अर्थ वताओ ।

15. यदि एक त्रिभुज के शीर्ष विन्दु z_1, z_2, z_3 पर हों, तो सिद्ध करो कि त्रिभुज का केन्द्रक $\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$ है ।

16. विन्दु A तथा B क्रमशः $(2+i)$ एवं $(-3i)$ हैं । C एक अन्य विन्दु है जो मूल विन्दु को केन्द्र मान कर खींचे गये वृत्त (त्रिज्या $=6$) पर चलता है । सिद्ध करो कि $\triangle ABC$ का केन्द्रक एक वृत्त पर रहता है जिसका केन्द्र $\frac{2}{3}(1-i)$ पर है तथा जिसकी त्रिज्या 2 है ।

17. यदि तीन मिश्र काल्पनिक राशियों में निम्न संबंध हो

$$\frac{2}{z_1}=\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3},$$

तो सिद्ध करो कि ऑरगैंड चित्र में इन राशियों के सूचक विन्दु एक वृत्त पर स्थित हैं, जो केन्द्र से होकर जाता है ।

18. वृत्त $|z-1|=1$ पर P एक नियत विन्दु है । यदि Q एक ऐसा विन्दु है कि P के द्वारा व्यक्त मिश्र काल्पनिक राशि, उसके द्वारा व्यक्त राशि का वर्ग है, तो Q का विन्दु पथ ज्ञात करो, जव P वृत्त पर चलता है ।

19. यदि ऑरगैंड चित्र में एक समभुजीय त्रिभुज के शीर्ष z_1, z_2, तथा z_3 हों, तो सिद्ध करो कि

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2.$$

[भारतीय सिविल सर्विस 1943]

२·११ मिश्र काल्पनिक राशियों का गुणन – द-मायवर का प्रमेय—

यदि हम $(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ को $(\cos \beta + i \sin \beta)$ से गुणा करें जहाँ α, β कोई कोण हैं तो हमें निम्न प्राप्त होता है

$$(\cos \alpha \cos \beta - \sin\alpha \sin \beta) + i (\cos\alpha \sin \beta + \cos \beta \sin\alpha),$$

अथवा

$$\cos (\alpha + \beta) + i \sin (\alpha + \beta).$$

अतः

$$(\cos\alpha + i \sin \alpha) (\cos \beta + i \sin \beta) = \cos (\alpha + \beta) + i \sin (\alpha + \beta).$$

अब इस समीकरण के दोनों पक्षों को $(\cos \gamma + i \sin \gamma)$ से गुणा करने पर

$$(\cos\alpha + i \sin\alpha) (\cos \beta + i \sin \beta) (\cos \gamma + i \sin \gamma)$$
$$= \{ \cos (\alpha + \beta) + i \sin (\alpha + \beta) \} (\cos \gamma + i \sin \gamma)$$
$$= \cos (\alpha + \beta + \gamma) + i \sin (\alpha + \beta + \gamma).$$

इस प्रकार n खंडों का गुणनफल निम्न होगा

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha) (\cos \beta + i \sin \beta) (\cos \gamma + i \sin \gamma) \ldots\ldots (\cos \eta + i \sin \eta)$$
$$= \cos (\alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots + \eta) + i \sin (\alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots + \eta).$$

अब यदि $\alpha = \beta = \gamma = \ldots\ldots\ldots = \eta$ तथा प्रत्येक कोण θ है, तो

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos (\theta + \theta + \ldots + \theta) + i \sin (\theta + \theta + \ldots\ldots + \theta)$$
$$= \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

द-मायवर का प्रमेय निम्न है—

$(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ व्यंजक $(\cos \theta + i \sin\theta)^n$ *का एक मान है, जहाँ n घनात्मक, ऋणात्मक, पूर्ण संख्या अथवा कोई भिन्न है।*

हमें तीन स्थितियों पर विचार करना पड़ेगा—

स्थिति १—जब n एक धनात्मक पूर्ण संख्या है।

यह उपर्युक्त से सिद्ध है, जहाँ खंडों का गुणनफल वास्तविक गुणन से प्राप्त हुआ है।

स्थिति २—जब n एक ऋणात्मक पूर्ण संख्या है।

मान लें $n = -m$, जहाँ m एक धनात्मक पूर्ण संख्या है।

तब $$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-m}$$

$$=\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^m},$$

$$=\frac{1}{(\cos m\theta+i\sin m\theta)} \qquad [\text{स्थिति १ से}],$$

$$=\frac{\cos m\theta-i\sin m\theta}{(\cos m\theta+i\sin m\theta)(\cos m\theta-i\sin m\theta)},$$

$$=\frac{\cos m\theta-i\sin m\theta}{\cos^2 m\theta+\sin^2 m\theta},$$

$$=\cos m\theta-i\sin m\theta,$$

$$=\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta),$$

$$=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

$-m$ के स्थान पर n रखने पर।

इस प्रकार द-मायवर का प्रमेय एक ऋणात्मक पूर्ण संख्या घात के लिए सिद्ध हो गया।

स्थिति ३—जब n एक भिन्न है।

मान लें $n=p/q$, जहाँ p, q पूर्ण संख्या हैं तथा q धनात्मक है एवं p और q में कोई सार्व गुणक नहीं है।

तब स्थिति (१) से

$$\left(\cos\frac{p\theta}{q}+i\sin\frac{p\theta}{q}\right)^q=\cos p\theta+i\sin p\theta.$$

पुनः स्थिति (१) या (२) से

$$(\cos p\theta+i\sin p\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^p$$

अतएव $$\left(\cos\frac{p\theta}{q}+i\sin\frac{p\theta}{q}\right)^q=(\cos\theta+i\sin\theta)^p,$$

अतः दोनों पक्षों का q वां मूल लेने पर

$\left(\cos\frac{p\theta}{q}+i\sin\frac{p\theta}{q}\right)$ व्यंजक $(\cos\theta+i\sin\theta)^{p/q}$

का एक मान है।

इस प्रकार द-मायवर का प्रमेय समस्त परिमेय घातों के लिए सिद्ध हो गया। यह प्रमेय ऋणात्मक कोणों के लिए भी सार्थक है, अर्थात् यदि θ के स्थान पर $-\theta$ लिखें, तो हमें प्राप्त होगा

$$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos n\theta - i\sin n\theta.$$

अथवा n के समस्त परिमेय मानों के लिए

$(\cos n\theta - i\sin n\theta)$ व्यंजक $(\cos\theta - i\sin\theta)^n$ का एक मान है।

यदि $n=0$, तो समीकरण

$$\cos n\theta + i\sin\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

के दोनों पक्षों का मान इकाई है, अतः यह प्रमेय $n=0$ के लिए भी सत्य है।

२.१२. $(\cos p\theta + i\sin p\theta)^{1/q}$ के q विभिन्न मान—द-मायवर के प्रमेय के अनुसार $(\cos p\theta + i\sin p\theta)^q$ का एक मान $\left(\cos\dfrac{p\theta}{q} + i\sin\dfrac{p\theta}{q}\right)$ है। जिसका तात्पर्य है कि इस व्यंजक के अन्य मान भी हैं। समीकरण मीमांसा से हमें विदित है कि q कोटि के किसी समीकरण के q मूल होते हैं। अतएव

$$(\cos p\theta + i\sin p\theta)^{1/q}$$

के भी q विभिन्न मान होंगे।

अव हम यह सिद्ध करेंगे कि इसके केवल q विभिन्न मान ही होंगे, q से अधिक नहीं।

हम जानते हैं कि किसी कोण θ में 2π या इसके अपवर्त्य की वृद्धि से $\sin\theta$ अथवा $\cos\theta$ के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता, अतएव

$$\cos p\theta + i\sin p\theta = \cos(p\theta + 2r\pi) + i\sin(p\theta + 2r\pi),$$

जहाँ r कोई पूर्ण संख्या है।

अतः $$(\cos p\theta + i\sin p\theta)^{1/q}$$
$$= [\cos(p\theta + 2r\pi) + i\sin(p\theta + 2r\pi)]^{1/q}$$
$$= \cos\frac{(p\theta + 2r\pi)}{q} + i\sin\frac{(p\theta + 2r\pi)}{q}.$$

इसमें क्रमशः $r=0, 1, 2, \ldots (q-1)$ रखने पर हमें दाहिनी ओर के व्यंजक के निम्न q पृथक् पृथक् मान प्राप्त होते हैं —

$$\cos \frac{p\theta}{q} + i \sin \frac{p\theta}{q},$$

$$\cos \frac{p\theta + 2\pi}{q} + i \sin \frac{p\theta + 2\pi}{q},$$

$$\cos \frac{p\theta + 4\pi}{q} + i \sin \frac{p\theta + 4\pi}{q},$$

....

....

$$\cos \frac{p\theta + (n-1)2\pi}{q} + i \sin \frac{p\theta + (n-1)2\pi}{q}.$$

उपर्युक्त में से कोई भी दो मान एक दूसरे से सर्वथा भिन्न हैं, क्योंकि यदि $r=n$ तथा $r=m$, तो दो मान निम्न हैं—

$$\cos \frac{p\theta + 2n\pi}{q} + i \sin \frac{p\theta + 2n\pi}{q}$$

$$\cos \frac{p\theta + 2m\pi}{q} + i \sin \frac{p\theta + 2m\pi}{q}.$$

यहाँ पर दोनों व्यंजकों के कोणों का अन्तर $\frac{(n \sim m)\, 2\pi}{q}$ है।

तथा क्योंकि $(n \sim m) < q$, अतएव $\frac{(n \sim m)\, 2\pi}{q}$ का मान न तो 2π के बराबर है और न 2π के किसी पूर्ण अपवर्त्य के बराबर। अतः ये दोनों मान एक दूसरे से भिन्न हैं।

अब हम यह सिद्ध करेंगे कि $r=0,1,2, \ldots\ldots\ldots\ldots (q-1)$ के उपरान्त ये ही मान पुनः प्राप्त होंगे। $r=q-1$ के बाद r के किसी मान को

$aq+b$ के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ a तथा b पूर्ण संख्या हैं, तथा b धनात्मक एवं q से कम है।

अब $$\cos \frac{p\theta+2(aq+b)\pi}{q}+i \sin \frac{p\theta+2(aq+b)\pi}{q}$$

$$= \cos \frac{p\theta+2b\pi}{q}+i \sin \frac{p\theta+2b\pi}{q}.$$

यह मान हमें पहले q मानों में प्राप्त हो चुका है, क्योंकि संख्या b संख्याओं o,1,2; ......$(q-1)$ में से एक है। अतः r का मान q अथवा q से अधिक रखने पर पहले ही मान प्राप्त होंगे।

२.१३ पूर्वगामी विवेचन के आधार पर हम द-मायवर के प्रमेय को इस प्रकार भी रख सकते हैं—

यदि n कोई धनात्मक या ऋणात्मक पूर्ण संख्या है, तो

$$(\cos \theta+i \sin \theta)^n= \cos n\theta+i \sin n\theta;$$

एव यदि n कोई परिमेय भिन्न है, तो

$$\cos n\theta+i \sin n\theta$$

व्यंजक $(\cos \theta+i \sin \theta)^n$ का एक मान है।

२.१४ मिश्र काल्पनिक राशियों के मूल निकालना—हम किसी भी मिश्र काल्पनिक राशि $z=x+iy$ को मापाँक तथा कोणाँक के रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं

$$z=r(\cos \theta+i \sin \theta).$$

अतएव यदि हमें z अथवा $x+iy$ का कोई मूल ज्ञात करना हो, तो हम द-मायवर के प्रमेय का प्रयोग करके

$$r(\cos \theta+i \sin \theta)$$

के मल ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण १। निम्नलिखित के सब मान निकालो

$$(-1+i\sqrt{3})^{1/4}.$$

मान लें $-1+i\sqrt{3}=r(\cos \theta+i \sin \theta).$

तब $r\cos\theta=-1$ तथा $r\sin\theta=\sqrt{3}$

जिससे $r=\sqrt{(1+3)}=2$ तथा $\theta=\tan^{-1}(-\sqrt{3})=\frac{2\pi}{3}$.

अतः $$(-1+i\sqrt{3})^{1/4}=2^{1/4}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2n\pi\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2n\pi\right)\right]^{1/4}$$

$$=2^{1/4}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2n\pi\right)\frac{1}{4}+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2n\pi\right)\frac{1}{4}\right].$$

जहाँ $n=0, 1, 2, 3$.

अतएव अभीष्ट मान निम्न हैं—

$$2^{1/4}\left[\cos\frac{2\pi}{12}+i\sin\frac{2\pi}{12}\right],$$

$$2^{1/4}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{12}+\frac{2\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{12}+\frac{2\pi}{4}\right)\right],$$

$$2^{1/4}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{12}+\frac{4\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{12}+\frac{4\pi}{4}\right)\right],$$

$$2^{1/4}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{12}+\frac{6\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{12}+\frac{6\pi}{4}\right)\right].$$

अर्थात् $$2^{1/4}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right], 2^{1/4}\left[-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right],$$

$$2^{1/4}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right], 2^{1/4}\left[\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]।$$

उदाहरण २ । $z^n=1$, को हल करो जहाँ n एक धनात्मक पूर्ण संख्या है।

मान लें $1=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

इससे प्राप्त होता है कि $r=1, \theta=0$.

अतएव $z^n=\cos(0+2r\pi)+i\sin(0+2r\pi)$,

$$z=[\cos 2r\pi+i \sin 2r\pi]^{1/n}$$

$$= \cos \frac{2r\pi}{n}+i \sin \frac{2r\pi}{n},$$

जहाँ $r=0, 1, 2, \ldots\ldots (n-1)$

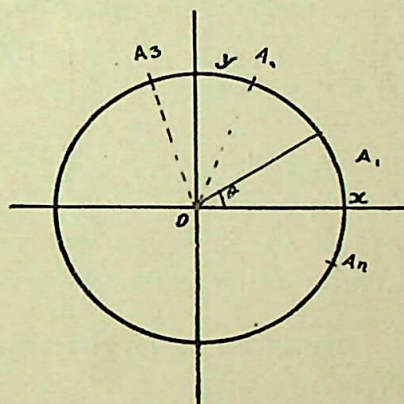
इस प्रकार इकाई के n मूल क्रमशः ये हैं

$$1,\ w_n,\ w^2_n,\ w^3_n, \ldots\ldots\ldots\ldots w_n^{n-1},$$

जहाँ $$w_n = \cos \frac{2\pi}{n}+i \sin \frac{2\pi}{n} \text{ ।}$$

२.१५ मिश्र काल्पनिक राशियों के घातों तथा मूलों का ज्यामितीय निरूपण—

आँरगैंड के चित्र में त्रिज्या इकाई का एक वृत्त है जिसका केन्द्र मूल विन्दु है।

मिश्र काल्पनिक विन्दु A_1 $(\cos \theta+i \sin \theta)$ को इस वृत्त पर स्थित विन्दु A_1 से सूचित कर सकते हैं जहाँ $\angle XOA_1=\theta$ अथवा चाप $XA_1=\theta$ क्योंकि वृत्त की त्रिज्या 1 है।

अब $(\cos\theta+i \sin \theta)^2=(\cos 2\theta+i \sin 2\theta)$ को विन्दु A_2 से सूचित कर सकते हैं, जहाँ चाप $XA_2=2\theta$ । इस प्रकार यदि हम वृत्त की परिधि को n बराबर भागों में विन्दुओं $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_n$ से बाँट दें तो ये विन्दु क्रमशः $(\cos \theta+i \sin \theta)$, $(\cos \theta+i \sin \theta)^2, \ldots\ldots\ldots$ $(\cos\theta+i \sin\theta)^n$ के द्योतक होंगे।

पुनः मान लें कि विन्दु B मिश्र काल्पनिक राशि $(\cos\phi+i\sin\phi)$ का द्योतक है, तथा हमें इस राशि के एक nth मूल का ज्यामितीय निरूपण करना है। ऐसी परिस्थिति में हमें वृत्त पर एक ऐसा विन्दु A ज्ञात करना पड़ेगा कि चाप $XB=n$ चाप XA। किन्तु B की X से चापीय दूरी ϕ,

$\phi+2\pi, \phi+4\pi, \ldots\ldots$ या $\phi+2r\pi$ में से कोई एक हो सकती है, जहाँ r एक पूर्ण संख्या है। चाप XA को $(\phi+2r\pi)/n$ मान सकते हैं। r को विभिन्न मान देने पर हमें इससे वृत्त पर n विन्दु प्राप्त होंगे। मान लिया ये विन्दु $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ है। ये विन्दु $(\cos\phi+i\sin\phi)^{1/n}$ के n मूलों को प्रतिदर्शित करते हैं।

वहुभुज $A_1A_2\ldots A_n$ वृत्त के अन्तर्गत एक सम वहुभुज है जिसके शीर्ष $(\cos\phi+i\sin\phi)^{1/n}$ के n मूलों के द्योतक हैं। इसी प्रकार मिश्र काल्पनिक राशि $r(\cos\phi+i\sin\phi)$ के n मूल एक सम बहुभुज के शीर्षों से प्रतिदर्शित होंगे, जो त्रिज्या $r^{1/n}$ से मूल विन्दु को केन्द्र मान कर खींचे गये एक वृत्त के अन्तर्गत है।

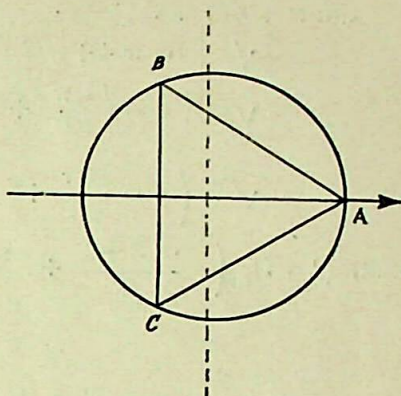
उदाहरण १। इकाई के तीन घनमूल निकालो और उन्हें ज्यामितीय विधि से निरूपित करो।

क्योंकि
$$1=\cos 2r\pi+i\sin 2r\pi,$$

अतः
$$(1)^{1/3}=(\cos 2r\pi+i\sin 2r\pi)^{1/3}$$

$$=\cos\frac{2r\pi}{3}+i\sin\frac{2r\pi}{3} \qquad (1)$$

जहाँ $r=0,1,2.$

ज्यामितीय प्रतिदर्शन के लिये आरगैंड चित्र में इकाई त्रिज्या का एक वृत्त खींचे। जब $r=0$, तो इकाई के घनमूल का द्योतक वृत्त पर विन्दु A होगा। अब चाप ABC को विन्दु B तथा C से तीन बराबर भागों में विभक्त कर दें, तब विन्दु B तथा C इकाई के दो अन्य घनमूलों के सूचक होंगे।

विन्दु B का कोणाँक $\frac{2\pi}{3}$ तथा C का कोणांक $\frac{4\pi}{3}$ अथवा $-\frac{2\pi}{3}$ है। क्योंकि वृत्त की त्रिज्या इकाई है, तथा विन्दुओं के कोणाँक वही हैं जो (1) से प्राप्त होते हैं, अतएव ये विन्दु इकाई के तीन घन मूलों को निरूपित करते हैं।

उदाहरण २। हल करो $x^3=2i-2$

मान लें $-2+2i=r\ (\cos\ \theta+i\sin\theta)$,

तब $\quad -2=r\cos\theta,\ 2=r\sin\theta$,

जिससे $\quad r=2\sqrt{2}$ तथा $\theta=\tan^{-1}\ (-1)=\frac{3\pi}{4}\cdot$

अतएव $\quad x=r1/3\ (\cos\theta+i\sin\theta)^{1/3}$

$$=(2\sqrt{2})^{1/3}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}+2n\pi\right)+ i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+2n\pi\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$=(2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{3\pi/4+2n\pi}{3}+ i\sin\frac{3\pi/4+2n\pi}{3}\right],$$

जहाँ $n=0,\ 1,\ 2$.

अतः x के तीन मान हैं—

$$\sqrt{2}\,(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4),$$

$$\sqrt{2}\left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12}\right),$$

$$\sqrt{2}\left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12}\right).$$

अथवा $(1+i)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$,

$$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)।$$

उदाहरण ३। हल करो $x^9 + x^5 - x^4 = 1$.

$$x^9 + x^5 - x^4 - 1 = 0 \qquad \text{............(1)}$$

या $$(x^4+1)(x^5-1) = 0$$

जिससे या तो $$x^4 + 1 = 0 \qquad \text{............(2)}$$

अथवा $$x^5 - 1 = 0 \qquad \text{............(3)}$$

अब सुगमतापूर्वक (2) तथा (3) को हल किया जा सकता है।

उदाहरण ४। हल करो $(x-1)^n = x^n$.

समीकरण के दोनों पक्षों का nth मूल लेने पर

$$x - 1 = x\left(\cos \frac{2r\pi}{n} + i \sin \frac{2r\pi}{n}\right),$$

जहाँ $r = 0, 1, 2, \ldots\ldots (n-1)$.

अतएव $$x\left[1 - \cos \frac{2r\pi}{n} - i \sin \frac{2r\pi}{n}\right] = 1,$$

या $$x\left[2\,[\sin^2 \frac{r\pi}{n} - 2i \sin \frac{r\pi}{n} \cos \frac{r\pi}{n}\right] = 1,$$

या $$2x \sin \frac{r\pi}{n}\left[\sin \frac{r\pi}{n} - i \cos \frac{r\pi}{n}\right] = 1.$$

दोनों पक्षों को $\left[\sin \frac{r\pi}{n} + i \cos \frac{r\pi}{n}\right]$ से गुणा करने पर

$$2x \sin \frac{r\pi}{n} = \sin \frac{r\pi}{n} + i \cos \frac{r\pi}{n}.$$

अतः $$x=\tfrac{1}{2}\left[1+i\cot\frac{r\pi}{n}\right],$$

जहाँ $r=0, 1, 2, \ldots\ldots(n-1)$.

उदाहरण ५। सिद्ध करो कि समीकरण

$$x^{10}+11x^5-1=0$$

के मूल

$$\tfrac{1}{2}\ (\pm\sqrt{5}-1)\left[\cos\frac{2r\pi}{5}+i\sin\frac{2r\pi}{5}\right]$$

के विभिन्न मान हैं, जहाँ r, एक पूर्ण संख्या है ।

दिये समीकरण में $x^5=y$ रखने पर इसका रूप निम्न होगा

$$y^2+11y-1=0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

इसके मूल हैं $$y=\frac{-11\pm\sqrt{125}}{2}$$

$$=\frac{-11\pm5\sqrt{5}}{2}$$

हर तथा अंश को 16 से गुणा करने पर

$$y=\frac{-176\pm80\sqrt{5}}{32}$$

$$=\left[\frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}\right]^5$$

क्योंकि $(\pm\sqrt{5}-1)^5 = \pm\ 25\sqrt{5}\ -5.25\ \pm\ 10.5\sqrt{5}\ -10.5$
$\pm5\sqrt{5}-1$

$$=-176\pm80\sqrt{5}\ .$$

अब $$y=x^5=\left(\frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}\right)^5\times\left[\cos 2r\pi+i\sin 2r\pi\right]$$

अतः $$x=\frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}\left[\cos\frac{2r\pi}{5}+i\sin\frac{2r\pi}{5}\right],$$

जहाँ r, एक पूर्ण संख्या है ।

उदाहरण

1. निम्नलिखित के मान ज्ञात करो—

(i) $(1+i)^{1/2}$, (ii) $(-1)^{2/3}$, (iii) $(-\sqrt{3}-i)^{2/3}$,
(iv) $(1-i)^{2/3}$, (v) $(1-i\sqrt{3})^{1/4}$.

2. $(2i-2)$ के घनमूल ज्ञात करो ।

3. $(i-\sqrt{3})$ के घनमूल निकालो ।

4. निम्नलिखित के समस्त मान ज्ञात करो—

$$(1+i\sqrt{3})^{3/4}+(1-i\sqrt{3})^{3/4},$$

तथा दिखाओ कि एक मान $\sqrt[4]{32}$ है ।

5. निम्नलिखित के वर्गमूल निकालो—

$-7-24i$. [भारतीय सिविल सर्विस, १९३४)

6. $(2-i)^2(4+3i)$ को $A+iB$ के रूप में लिखो एवं $(2-i)^{2/5}(4+3i)^{1/5}$ को भी मापाँक तथा कोणांक के रूप में लिखो ।

7. यदि z मिश्र काल्पनिक हो, तथा समीकरण

$$x^2-zx+z^2=0$$

के मूल x_1, x_2 हों, तो सिद्ध करो कि मूल विन्दु तथा विन्दु z को मिलाने वाली रेखा के दोनों ओर वनाये गये सम त्रिभुजों के शीर्ष x_1 तथा x_2 हैं ।

8. आरगैंड चित्र में निम्न को निरूपित करो —

(i) $(i)^{1/4}$, (ii) $(-5-12i)^3$, (iii) $\sqrt[5]{(32)}$ ।

9. सिद्ध करो कि इकाई के nth मूल एक गुणोत्तर श्रेणी में होते हैं ।

[इलाहावाद १९४४]

10. यदि $x=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$, जहाँ n एक धनात्मक पूर्ण संख्या है, तो सिद्ध करो कि $1+x^p+x^{2p}+x^{3p}+\ldots\ldots+(x^{n-1})^p$ का योग n के वरावर है, जव p पूर्णांक संख्या n का अपवर्त्य है, एवं p के अन्य सभी मानों के लिये यह योग शून्य के वरावर है ।

२.१६ संयुग्मी समिश्र काल्पनिक राशियों के फलनों का एक महत्वपूर्ण प्रगुण— यदि $f(x+iy)=A+iB$. जहाँ f मिश्र काल्पनिक राशि $x+iy$ का परिमेय फलन है और जिसके गुणक वास्तविक हैं, तो

$$f(x-iy)=A-iB.$$

यहाँ x, y, तथा A, B वास्तविक राशियाँ हैं ।

यदि $f\ (x+iy)$ एक परिमेय फलन है, तो इसका रूप होगा

$$f\,(x+iy)=\frac{a_\circ+a_1(x+iy)+a_2(x+iy)^2+\ldots\ldots+a_n(x+iy)^n}{b_\circ+b_1(x+iy)+b_2(x+iy)^2+\ldots\ldots+b_n(x+iy)^n}$$

जहाँ सब गुणक $a_\circ, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ तथा $b_\circ, b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots b_n$ वास्तविक हैं ।

द-मायवर के प्रमेय के प्रयोग से उपर्युक्त में प्रत्येक पद को हम $a+ib$ के रूप में लिख सकते हैं । अस्तु

$$f\,(x+iy)=\frac{a_\circ+a_1(A_1+iB_1)+\ldots\ldots\ldots+a_n(A_n+iB_n)}{b_\circ+b_1(C_1+iD_1)+\ldots\ldots\ldots\ldots+b_n(C_n+iD_n)}$$

$$=\frac{X+iY}{U+iV},$$

$$=\frac{(X+iY)\,(U+iV)}{U^2+V^2}$$

$$=A+iB,$$ मान लिया ।

अतएव उपरोक्त विधि से

$$f\,(x-iy)=\frac{(X-iY)\ (U+iV)}{U^2+V^2}$$

$$=A-iB$$

यह परिणाम अत्यन्त महत्वपूर्ण है तथा आगामी विवेचन में लाभदायक सिद्ध होगा ।

द-मायवर के प्रमेय से मिश्र काल्पनिक व्यंजकों को सरल किया जा सकता है । निम्न उदाहरणों में यह विधि दिखाई गई है ।

उदाहरण १ । यदि $z=\cos\theta+i\sin\theta$, तो सिद्ध करो कि

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{1}{2}}=(1+i)\,(\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\theta)^{1/2}$$ जब $0<\theta<\pi$;

तथा $$=(1-i)\,(-\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\theta)^{1/2},$$ जब $\pi<\theta<2\pi$.

पहली अवस्था में जब $0<\theta<\pi$,

$$\frac{1+z}{1-z}=\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$$

$$=\frac{2\cos^2\theta/2+2i\sin\theta/2\cos\theta/2}{2\sin^2\theta/2-2i\sin\theta/2\cos\theta/2}$$

$$=(\cot\tfrac{1}{2}\theta)\frac{\cos\theta/2+i\sin\theta/2}{\sin\theta/2-i\cos\theta/2}$$

$$=\cot\tfrac{1}{2}\theta\frac{(\cos\theta/2+i\sin\theta/2)(\sin\theta/2+i\cos\theta/2)}{(\sin^2\theta/2+\cos^2\theta/2)}$$

$$=(\cot\tfrac{1}{2}\theta)\times i$$

अतः $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{1}{2}}=(\cot\tfrac{1}{2}\theta)^{1/2}\times(i)^{1/2}$

$$=(\cot\tfrac{1}{2}\theta)^{1/2}\times\left[\cos\frac{(\pi/2+2r\pi)}{2}+i\sin\frac{(\pi/2+2r\pi)}{2}\right]$$

जहाँ $r=0, 1$.

यदि $(i)^{1/2}$ का मुख्य मान लें अर्थात् जब $r=0$, है, तो

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{1}{2}}=(\cot\tfrac{1}{2}\theta)^{1/2}\times[\cos\pi/4+i\sin\pi/4]$$

$$=(\cot\tfrac{1}{2}\theta)^{1/2}\times\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right]$$

$$=(1+i)(\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\theta)^{1/2}$$

दूसरी स्थिति में जब $\pi<\theta<2\pi$, मान लिया

$\theta=\pi+\phi$, जहाँ $0<\phi<\pi$.

तब　　$z=\cos(\pi+\phi)+i\sin(\pi+\phi)$,

अर्थात्　　$z=-(\cos\phi+i\sin\phi)$.

$$\therefore\ \frac{1+z}{1-z}=\frac{1-\cos\phi-i\sin\phi}{1+\cos\phi+i\sin\phi},$$

$$=\frac{2\sin^2\phi/2-2i\sin\phi/2\cos\phi/2}{2\cos^2\phi/2+2i\sin\phi/2\cos\phi/2}$$

$$= (\tan \tfrac{1}{2}\phi)\frac{\sin \tfrac{1}{2}\phi - i \cos \tfrac{1}{2}\phi}{\cos \tfrac{1}{2}\phi + i \sin \tfrac{1}{2}\phi},$$

$$= (\tan \tfrac{1}{2}\phi)(\sin \tfrac{1}{2}\phi - \cos \tfrac{1}{2}\phi)(\cos \tfrac{1}{2}\phi - i \sin \tfrac{1}{2}\phi)$$

$$= (\tan \tfrac{1}{2}\phi) \times (-i)$$

अतः $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{1/2} = (\tan \tfrac{1}{3}\phi)^{1/2} \times [\cos \pi/2 - i \sin \pi/2]^{1/2}$

$(-i)^{1/2}$ का मुख्य मान लेने पर ।

$$\therefore \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\tan \tfrac{1}{2}\phi\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (1-i)(\tfrac{1}{2} \tan \tfrac{1}{2}\phi)^{1/2}$$

$$= (1-i)[-\tfrac{1}{2} \cot \tfrac{1}{2}\theta]^{1/2}$$

ϕ का मान रखने पर ।

इस उदाहरण में $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{1}{2}}$ के केवल धनात्मक मान ही लिये गये हैं ।

उदाहरण २ । सिद्ध करो कि

$$\frac{1+\sin\theta + i\cos\theta}{1+\sin\theta - i\cos\theta} = \cos(\pi/2-\theta) + i\sin(\pi/2-\theta),$$

तथा इससे दिखाओ कि

$$\left[\frac{1+\sin\pi/8 + i\cos\pi/8}{1+\sin\pi/8 - i\cos\pi/8}\right]^8 = -1.$$

हम जानते हैं कि

$$\frac{1+\sin\theta + i\cos\theta}{1+\sin\theta - i\cos\theta} = \frac{1+\cos(\pi/2-\theta) + i\sin(\pi/2-\theta)}{1+\cos(\pi/2-\theta) - i\sin(\pi/2-\theta)}$$

$$= \frac{2\cos^2(\pi/4-\theta/2) + 2i\sin(\pi/4-\theta/2)\cos(\pi/4-\theta/2)}{2\cos^2(\pi/4-\theta/2) - 2i\sin(\pi/4-\theta/2)\cos(\pi/4-\theta/2)}$$

$$= \frac{\cos(\pi/4-\theta/2) + i\sin(\pi/4-\theta/2)}{\cos(\pi/_4-\theta/2) - i\sin(\pi/4-\theta/2)},$$

$$= \frac{\cos(\pi/4-\theta/2) + i\sin(\pi/4-\theta/2)}{[\cos(\pi/4-\theta/2) + i\sin(\pi/4-\theta/2]^{-1}},$$

$$= [\cos(\pi/4-\theta/2)+i\sin(\pi/4-\theta/2)]^2$$
$$= \cos(\pi/2-\theta)+i\sin(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)$$

द-मायवर के प्रमेय से।

अब $\theta=\pi/8$ रखने पर, उपर्युक्त से

$$\frac{1+\sin\pi/8+i\cos\pi/8}{1+\sin\pi/8-i\cos\pi/8}=\cos(\pi/2-\pi/8)+i\sin(\pi/2-\pi/8)$$
$$=\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8},$$

तथा
$$\left[\frac{1+\sin\pi/8+i\cos\pi/8}{1+\sin\pi/8-i\cos\pi/8}\right]^8=\left[\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right]^8$$
$$=\cos 3\pi+i\sin 3\pi$$
$$=-1.$$

उदाहरण ३। यदि $2\cos\theta=a+\dfrac{1}{a}$, और $2\cos\phi=b+\dfrac{1}{b}$,

.... आदि, तो सिद्ध करो

$$2\cos(\theta+\phi+\delta+\ldots\ldots)=abc\ldots\ldots+\frac{1}{abc\ldots\ldots}.$$

[आगरा १९४७; बनारस १९५२]

यदि $\cos\theta+i\sin\theta=a$,

तब द-मायवर के प्रमेय से $\cos\theta-i\sin\theta=\dfrac{1}{a}$,

जिससे स्पष्ट है कि $\qquad 2\cos\theta=a+\dfrac{1}{a}.$

इसी प्रकार $\cos\phi+i\sin\phi=b$, ... आदि।

अब
$$abc\ldots\ldots+\frac{1}{abc\ldots\ldots}$$
$$=(\cos\theta+i\sin\phi)(\cos\theta+i\sin\phi)\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\phi+i\sin\phi)\ldots\ldots\ldots)}$$

$$= \cos(\theta+\phi+\delta+\ldots\ldots)+i\sin(\theta+\phi+\delta+\ldots\ldots.)$$
$$+\frac{1}{\cos(\theta+\phi+\delta+\ldots\ldots)+i\sin(\theta+\phi+\delta+\ldots\ldots}$$
$$= \cos(\theta+\phi+\delta+\ldots\ldots)+i\sin(\theta+\phi+\delta+\ldots\ldots)$$
$$+\cos(\theta+\phi+\delta+\ldots\ldots)-i\sin(\theta+\phi+\delta+\ldots\ldots)$$
$$= 2\cos(\theta+\phi+\delta+\ldots\ldots).$$

उदाहरण ४। यदि $\sin\theta+\sin\phi+\sin\psi=\cos\theta+\cos\phi+\cos\psi=0$, तो सिद्ध करो कि

$$\cos 3\theta+\cos 3\phi+\cos 3\psi=3\cos(\theta+\phi+\psi),$$

तथा $\sin 3\theta+\sin 3\phi+\sin 3\psi=3\sin(\theta+\phi+\psi)$.

[आगरा १९५१]

मान लें

$$a=\cos\theta+i\sin\theta,$$
$$b=\cos\phi+i\sin\phi,$$
$$c=\cos\psi+i\sin\psi.$$

अतः $a+b+c=(\cos\theta+\cos\phi+\cos\psi)+i(\sin\theta+\sin\phi+\sin\psi)$

$$=0$$

अतएव $a^3+b^3+c^3-3abc.$

$$=(a+b+c)\ (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=0$$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc.$

इसमें $a,b,c,$ के मान रखने पर, द-मायवर के प्रमेय से

$$(\cos 3\theta+\cos 3\phi+\cos 3\psi)+i(\sin 3\theta+\sin 3\phi+\sin 3\psi)$$
$$=3[\cos(\theta+\phi+\psi)+i\sin(\theta+\phi+\psi)].$$

अब वास्तविक तथा काल्पनिक अंशों को बराबर करने पर

$$\cos 3\theta+\cos 3\phi+\cos 3\psi=3\cos(\theta+\phi+\psi),$$

तथा $\sin 3\theta+\sin 3\phi+\sin 3\psi=3\sin(\theta+\phi+\psi)$.

उदाहरण ५। यदि $x=\cos\theta+i\sin\theta$, तथा $1+\sqrt{(1-y^2)}=ny$, तो सिद्ध करो

$$1+y\cos\theta=\frac{y}{2n}(1+nx)\left(1+\frac{n}{x}\right)$$

हमें ज्ञात है कि $$1+\sqrt{(1-y^2)}=ny,$$

या $$\sqrt{(1-y^2)}=ny-1$$

वर्गीकरण से $$1-y^2=n^2y^2-2\,n\,y+1$$

या $$y\,(1+n^2)=2n.$$

$$\therefore \quad \frac{2\,n}{y}=1+n^2. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

अब $$\frac{y}{2\,n}(1+n\,x)\left(1+\frac{n}{x}\right)$$

$$=\frac{y}{2\,n}\left(1+nx+\frac{n}{x}+n^2\right),$$

$$=\frac{y}{2\,n}(1+n^2+2n\cos\theta), \text{ जहाँ } x+\frac{1}{x}=2\cos\theta.$$

$$=\frac{y}{2\,n}(1+n^2)+y\cos\theta$$

$$=1+y\cos\theta\text{ , (1) से ।}$$

उदाहरण ६ । सिद्ध करो

$$\left[\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right]^n+\left[\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right]^n$$

का मान -1 है 'जब $n=3p\pm1$, तथा इसका मान 2 है, जब $n=3p$, जहाँ p एक पूर्ण संख्या है ।

मापाँक तथा कोणांक के रूप में रखने पर

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

$$=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n+\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n$$

$$=2\cos\frac{2\,n\pi}{3}.$$

जब $n=3p\pm1$, इस व्यंजक का मान

$$=2\cos(3p\pm1)\frac{2\pi}{3},$$
$$=2\cos\left(2p\pi\pm\frac{2\pi}{3}\right),$$
$$=2\cos\frac{2\pi}{3},$$
$$=2\times(-\tfrac{1}{2})=-1.$$

जब $n=3p$, इस व्यंजक का मान

$$=2\cos 2p\pi$$
$$=2.$$

अध्याय २ पर उदाहरण

1. निम्नलिखित का मापाँक एवं कोणांक ज्ञात करो—
$(\sin\theta-i\cos\theta)^3/(\cos\theta-i\sin\theta)^3$ ।

2. निम्न को $A+iB$ के रूप में व्यक्त करो—
$(1+\cos\theta+i\sin\theta)^4/(\cos\theta-i\sin\theta)^5$ ।

3. यदि $(1+x)/(1-x)=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$, तो सिद्ध करो कि $x=i\tan\theta$ ।

4. यदि $2\cos\theta=x+\dfrac{1}{x}$, तथा $2\cos\phi=y+\dfrac{1}{y}$,

तो दिखाओ कि

$$\frac{x^m}{y^n}+\frac{y^n}{x^m}$$

का एक मान $2\cos(m\theta-n\phi)$ है । [वनारस, १९४१]

5. यदि $x=\cos\theta+i\sin\theta$, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{1}{2x+}\frac{1}{2x+}\frac{1}{2x+}\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ अनन्त तक}$$

का मान $\{\sqrt{(\cos\theta+\cos^2\theta)}-\cos\theta\}$
$+i\{\sqrt{(\cos\theta-\cos^2\theta)}-\sin\theta\}$ है।

6. सिद्ध करो कि

$$\left[\frac{1+\sin\phi+i\cos\phi}{1+\sin\phi-i\cos\phi}\right]^n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}-n\phi\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{2}-n\phi\right)।$$

[आगरा १९४०; बनारस १९४३]

7. वह मिश्र काल्पनिक राशि ज्ञात करो जिसका मापाँक $(4+3i)$ के मापाँक का दुगुना है, तथा जिसका कोणांक $(4+3i)$ के कोणांक से $\pi/4$ कम है।

8. सरल करके सिद्ध करो कि

$$[\cos\theta-\cos 2\theta+i(\sin\theta-\sin 2\theta)]^8$$
$$+[\cos\theta-\cos 2\theta-i(\sin\theta-\sin 2\theta)]^8$$
$$=[2\sin\theta/2]^8\, 2\cos 12\theta.$$

9. यदि $$x_r=\cos\frac{\pi}{2^r}+i\sin\frac{\pi}{2^r}.$$

तो दिखाओ कि

$$x_1x_2x_3\ldots\ldots\ldots\ldots\infty=-1.$$

[बनारस, १९५४; इलाहाबाद, १९४७]

10. यदि $a=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$, तथा b, c, d के लिए भी ऐसे ही व्यंजक प्राप्त हों, तो सिद्ध करो कि

(i) $\sqrt{(abcd)}+1/\sqrt{(abcd)}=2\cos(\theta+\phi+\psi+\delta)$,

(ii) $\sqrt{(ab/cd)}+\sqrt{(cd/ab)}=2\cos(\theta+\phi-\psi-\delta)$,

(iii) $(a+b)(c+d)=4\cos(\theta-\phi)\cos(\psi-\delta)\times$
$\{\cos(\theta+\phi+\psi+\delta)+i\sin(\theta+\phi+\psi+\delta)\}$.

11. यदि $\sin\theta+\sin\phi+\sin\psi=\cos\theta+\cos\phi+\cos\psi=0$, तो दिखाओ कि

$$\sin 2\theta+\sin 2\phi+\sin 2\psi=\cos 2\theta+\cos 2\phi+\cos 2\psi=0.$$

12. यदि $2\cos\theta=a+\dfrac{1}{a}$, $2\cos\phi=b+\dfrac{1}{b}$, इत्यादि तो सिद्ध करो कि.

$$2\cos(m\theta+n\phi+p\psi+\ldots\ldots)=a^m b^n c^p\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{1}{a^m b^n c^p\ldots\ldots}.$$

13. यदि $x = \cos\theta + i\ \sin\theta,\ y = \cos\phi + i\ \sin\phi$, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{(x+y)(xy-1)}{(x-y)(xy+1)} = \frac{\sin\theta + \sin\phi}{\sin\theta - \sin\phi}$$ । [भारतीय सिविल सर्विस १९४३]

14. यदि दो धनात्मक पूर्ण संख्याओं r तथा s का योग सदैव m हो तो सर्वसमिका

$$\frac{x^{m+1} y^{m+1}}{x-y} = x^m + x^{m-1}y + x^{m-2}y^2 + \ldots + y^m$$

से $\cos(r\alpha + s\beta)$ के समस्त विभिन्न मानों का योग ज्ञात करो ।

15. यदि $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \ldots\ldots (a_n + i\ b_n) = A + i\ B$, तो सिद्ध करो कि

$$\tan^{-1}\frac{b_1}{a_1} + \tan^{-1}\frac{b_2}{a_2} + \ldots\ldots + \tan^{-1}\frac{b_n}{a_n} = \tan^{-1}\frac{B}{A};$$

तथा $(a^2{}_1 + b^2{}_1)(a^2{}_2 + b^2{}_2) \ldots\ldots (a^2{}_n + b^2{}_n) = A^2 + B^2$.

(इलाहाबाद, १९५१; बनारस, १९४८;
यू० पी० सिविल सर्विस, १९४५)

16. यदि $f(ix) = \left(1 + i\frac{x}{a}\right)\left(1 + i\frac{x}{b}\right)\left(1 + i\frac{x}{c}\right) \ldots\ldots = A + iB,$

तो दिखाओ कि

$$\tan^{-1}\frac{x}{a} + \tan^{-1}\frac{x}{b} + \tan^{-1}\frac{x}{c} + \ldots\ldots = \tan^{-1}\frac{B}{A}.$$

इससे या अन्य विधि से सिद्ध करो कि

$$\tan^{-1}\frac{x^2}{1^2} + \tan^{-1}\frac{x^2}{2^2} + \tan^{-1}\frac{x^2}{3^2} + \ldots\ldots\ldots \infty$$

$$= \tan^{-1}\left\{\frac{\tan\frac{\pi x}{\sqrt{2}} - \tanh\frac{\pi x}{\sqrt{2}}}{\tan\frac{\pi x}{\sqrt{2}} + \tanh\frac{\pi x}{\sqrt{2}}}\right\}.$$

(यू० पी० सिविल सर्विस, १९४२)

17. सिद्ध करो कि व्यंजक

$$\cos\frac{\theta + 2r\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2r\pi}{n}$$

में, r , को क्रमश: 1, 2, 3, ...$(n-1)$ मान देने पर प्राप्त व्यंजकों की श्रेणी में आरम्भ एवं अन्त से समान दूरी के किन्हीं दो पदों का गुणन फल स्थिर होता है ।

(इलाहाबाद, १९४७)

18. यदि $x = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ तो सिद्ध करो कि

$$1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + x^{4n}$$

का योग 5 है, जब कि $n = 5$, या 5 का कोई अपवर्त्य है, परन्तु यह योग शून्य है जब कि n कोई अन्य पूर्ण संख्या है ।

१९. बताओ कि आॅरगैंड चित्र में दो मिश्र काल्पनिक राशियों का योग एवं उनका अन्तर किस प्रकार निरूपित करते हैं ।

(यू० पी० सिविल सर्विस, १९४४)

20. आॅरगैंड चित्र में $ABCD$ एक वर्ग है, जिसका क्षेत्रफल धनात्मक है। वर्ग के कर्ण, विन्दु ($6-i$) पर एक दूसरे को काटते हैं । यदि विन्दु A, $(1-2i)$ हो, तो सदिश $\overline{AB}$ एवं $\overline{AD}$ मिश्र काल्पनिक राशियों $(6-4i)$ तथा ($4+6i$) के द्योतक होंगे ।

21. यदि आॅरगैंड चित्र में विन्दु A, B, तथा C क्रमश: मिश्र काल्पनिक राशियों $2, z, 1/z$ के द्योतक हैं । यदि मूल विन्दु तथा A को मिलाने वाली रेखा को व्यास मान कर खींचे गये वृत्त पर B स्थित हो, तो C का विन्दुपथ ज्ञात करो ।

22. आॅरगैंड चित्र में मिश्र काल्पनिक राशि z को विन्दु A से सूचित करते हैं । विन्दुओं $\sqrt{z}$ को ज्यामितीय विधि से किस प्रकार प्राप्त करेंगे ?

(संकेत— यदि $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, तो

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\ (\cos\theta/2 + i\sin\theta/2)$$

मान लें मूल विन्दु O है । तब $OA = r$ । यदि $\sqrt{z}$ विन्दु P और Q हों, तो r के वर्गमूल की द्योतक रेखायें OP, OQ प्राप्त करने के लिये ज्यामितीय रचना करो ।)

23. यदि z, एक नियत मिश्र काल्पनिक राशि है, तथा x एक चल राशि है, तो ऑरगैंड चित्र में ज्यामितीय क्षेत्र ज्ञात करो जिसमें विन्दु x निम्न पृथक पृथक प्रतिवन्धों के अतर्गत स्थित होगा :

(i) $\dfrac{x-z}{z}$ का वास्तविक अंश ऋणात्मक हो,

(ii) $\dfrac{x-z}{x}$ का वास्तविक अंश ऋणात्मक हो ।

सिद्ध करो कि यदि प्रतिवन्ध (ii) सन्तुष्ट होता है तो (i) भी सन्तुष्ट होता है, पर आवश्यक नहीं कि इसका विलोम सत्य हो ।

यदि प्रतिवन्ध (i) प्रत्येक विन्दु z के लिये लागू हो, जो एक ऐसी रेखा पर स्थित है जो कि मूल विन्दु से होकर नहीं जाती तो विन्दु x किस क्षेत्र में स्थित होगा ? इस फल का व्यापक रूप वताओ ।

(भारतीय सिविल सर्विस, १९३३)

अध्याय ३

त्रिकोणमितीय फलनों का विस्तार

३.०१ . द-मायवर के सिद्धान्त के प्रयोग से हम $\cos^m\theta$, $\sin^n\theta$ या इनके गुणनफल $\cos^m\theta \sin^n\theta$ का कोण θ के अपवर्त्यों के cosine अथवा sine की श्रेणी में विस्तार कर सकते हैं ।

मान लें $$x = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad \text{........(1)}$$

जिससे $$\frac{1}{x} = \cos\theta - i\sin\theta, \qquad \text{........(2)}$$

तथा $$x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta, \qquad \text{........(3)}$$

एवं $$x - \frac{1}{x} = 2i\sin\theta. \qquad \text{........(4)}$$

यदि p, एक पूर्ण संख्या है, तो द-मायवर के सिद्धान्त द्वारा (1) और (2) से हमें निम्न प्राप्त है :

$$x^p = \cos p\theta + i\sin p\theta \qquad \text{........(5)}$$

$$\frac{1}{x^p} = \cos p\theta - i\sin p\theta \qquad \text{........(6)}$$

अत: $$x^p + \frac{1}{x^p} = 2\cos p\theta \qquad \text{........(7)}$$

एवं $$x^p - \frac{1}{x^p} = 2i\sin p\theta \qquad \text{........(8)}$$

अब $$(2\cos\theta)^m (2i\sin\theta)^n = \left(x + \frac{1}{x}\right)^m \left(x - \frac{1}{x}\right)^n. \qquad (9)$$

इस सभीकरण के दाहिने पक्ष का द्विपद प्रमेय से x के घातों में प्रसार करने पर तथा समान पर विपरीत चिन्ह वाली घातों के एक साथ रखने पर हमें $\left(x^p + \frac{1}{x^p}\right)$ अथवा $\left(x^p - \frac{1}{x^p}\right)$ के समान व्यंजक प्राप्त होंगे ।

जब n सम है, तो $\left(x+\frac{1}{x}\right)^m\left(x-\frac{1}{x}\right)^n$ के विस्तार में हमें $\left(x^p+\frac{1}{x^p}\right)$की भांति पद प्राप्त होंगे किन्तु जब n विषम है तो इस प्रसार में हमें $\left(x^p-\frac{1}{x^p}\right)$ की भाँति पद प्राप्त होते हैं। समीकरणों (7) तथा (8)से स्पष्ट है कि ये व्यंजक क्रमशः $2\cos p\theta$ एवं $2i\sin p\theta$ के बराबर हैं।

यह ध्यान देने योग्य है कि $\cos^m\theta$ का सदैव θ के अपवर्त्यों के cosine की श्रेणी में विस्तार किया जा सकता है, क्योंकि यह केवल $\left(x+\frac{1}{x}\right)^m$ के द्विपद विस्तार पर निर्भर है। परन्तु $\sin^n\theta$ का विस्तार $\left(x-\frac{1}{x}\right)^n$ के द्विपद विस्तार पर निर्भर है, जिसमें n के सम होने पर $\left(x^p+\frac{1}{x^p}\right)$ के रूप के, तथा n के विषम होने पर $\left(x^p-\frac{1}{x^p}\right)$ के रूप के, पद प्राप्त होते हैं। अतएव n के सम अथवा विषम होने पर $\sin^n\theta$ का विस्तार क्रमशः θ के अपवर्त्यों के cosines अथवा sines की श्रेणी में किया जा सकता है।

३.०२ . $\cos^n\theta$ का θ के अपवर्त्यों के cosines को श्रेणी में विस्तार (जब n एक धनात्मक पूर्ण संख्या है)।

हम जानते हैं कि

$$(2\cos\theta)^n=\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$$

$$=x^n+nx^{n-1}.\frac{1}{x}+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\frac{1}{x^2}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}.x^2\frac{1}{x^{n-2}}+nx.\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}\ldots.\quad(1)$$

अब पहला और अन्तिम पद, दूसरा और अन्त से दूसरा पद आदि की भांति पदों को जोड़ों में लेने से श्रेणी (१) का रूप निम्न होगा :

$$2^n\cos^n\theta = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + n\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(x^{n-4} + \frac{1}{x^{n-4}}\right) + \ldots\ldots$$

$$= 2\cos n\theta + 2n\cos(n-2)\theta + \frac{n(n-1)}{1.2}.2\cos(n-4)\theta + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

अतः $2^{n-1}\cos^n\theta = \cos n\theta + n\cos(n-2)\theta +$

$$\frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\theta + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

क्योंकि n एक धनात्मक पूर्ण संख्या है, इसलिये $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ के विस्तार में सीमित पद होंगे जिनकी संख्या $(n+1)$ है। अतः श्रेणी (1) अथवा (2) एक सीमित श्रेणी हैं।

यदि n एक विषम संख्या है तो श्रेणी में पदों की संख्या $(n+1)$ अर्थात् सम होगी और पदों को जोड़ों जोड़ों में लेने पर पूर्ण जोड़े बनेंगे। अन्तिम पद में $\cos\theta$ होगा और यह सुगमता से दिखाया जा सकता है कि इस पद का मान निम्न है :

$$\frac{\lfloor n}{\lfloor \frac{n-1}{2} \; \lfloor \frac{n+1}{2}}\cos\theta,$$

या $$\frac{n(n-1)\ldots\ldots\ldots\frac{1}{2}(n+3)}{\lfloor \frac{1}{2}(n-1)}\cos\theta.$$

यदि n एक सम संख्या है तो श्रेणी में पदों की संख्या $(n+1)$ अर्थात् विषम होगी और पदों को जोड़ों जोड़ों में लेने पर अन्त में एक पद बचेगा जो अचर होगा और यह सुगमता से दिखाया जा सकता है कि इस पद का मान निम्न है :

$$\frac{\frac{1}{2}\lfloor n}{\left\{\lfloor \frac{n}{2}\right\}^2},$$

या $$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\left(\frac{1}{2}n+1\right).}{2\lfloor \frac{1}{2}n}.$$

३.०३ . $\sin^n \theta$ का θ के अपवर्त्यों के cosines अथवा sines की श्रेणी में विस्तार (जब n एक धनात्मक पूर्ण संख्या है) ।

हम जानते हैं कि

$$(2i \sin \theta)^n = \left(x - \frac{1}{x} \right)^n$$

अथवा $$2^n i^n \sin^n \theta = \left(x - \frac{1}{x} \right)^n \qquad \ldots\ldots(1)$$

स्थिति १—जब n एक सम संख्या है ।

तब $$(i)^n = (i^2)^{n/2} = (-1)^{n/2}.$$

और (1) के विस्तार में अन्तिम पद $+\frac{1}{x^n}$ है ।

अतः (1) का विस्तार करने पर हमें निम्न पद प्राप्त होंगे :

$$2^n (-1)^{n/2} \sin^n \theta = x^n - nx^{n-1}.\frac{1}{x} + \frac{n(n-1)}{1.2}.x^{n-2}.\frac{1}{x^2}$$

$$- \ldots\ldots\ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}.x^2.\frac{1}{x^{n-2}} - n\,x.\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^n}.$$

$$= \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) - n\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}.$$

$$\left(x^{n-4} + \frac{1}{x^{n-4}}\right) - \ldots\ldots$$

$$= 2\cos n\theta - n.2\cos(n-2)\theta + \frac{n(n-1)}{1.2}.2\cos(n-4)\theta$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

अतः $$2^{n-1}(-1)^{n/2}\sin^n\theta = \cos n\theta - n\cos(n-2)\theta +$$

$$\frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\theta$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

क्योंकि n एक सम संख्या है, इसलिये पदों को जोड़ों जोड़ों में लेने के पश्चात अन्त में एक पद बचेगा जो अचर होगा और यह सुगमता से दिखाया जा सकता है कि उसका मान निम्न है

$$\frac{1}{2}(-1)^{n/2}\frac{\lfloor n}{\left\{\lfloor \frac{n}{2}\right\}^2},$$

अर्थात्
$$\frac{(-1)^{n/2}\, n\,(n-1)\,\ldots\ldots(\frac{1}{2}n+1)}{2\lfloor \frac{1}{2}n}.$$

स्थिति २—जब n एक विषम संख्या है।

तब $i^n = i.i^{n-1} = i.(i^2)^{\frac{n-1}{2}} = i\,(-1)^{\frac{n-1}{2}}$.

और (1) के विस्तार में अन्तिम पद $-\frac{1}{x^n}$ है

अतः (1) का विस्तार करने पर हमें निम्न पद प्राप्त होंगे :

$$2^n i\,(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n\theta = x^n - nx^{n-1}.\frac{1}{x} + \frac{n\,(n-1)}{1.2}x^{n-2}.\frac{1}{x^{n-2}}$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{n\,(n-1)}{1.2}.x^2.\frac{1}{x^{n-2}} + nx.\frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{x^n}.$$

$$= \left(x^n - \frac{1}{x^n}\right) - n\left(x^{n-2} - \frac{1}{x^{n-2}}\right) +$$

$$\frac{n\,(n-1)}{1.2}\left(x^{n-4} - \frac{1}{x^{n-4}}\right) - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 2\,i\sin n\theta - n.\,2i\,\sin(n-2)\,\theta +$$

$$\frac{n\,(n-1)}{1.2}2\,i\sin(n-4)\theta - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

अतः
$$2^{n-1}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n\theta = \sin n\theta - n.\sin(n-2)\,\theta$$

$$+\frac{n\,(n-1)}{1.2}\sin(n-4)\,\theta -$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

क्योंकि n एक विषम संख्या है अतः पदों को जोड़ों जोड़ों में लेने पर पूर्ण जोड़े बनेंगे और अन्तिम जोड़े में $\sin\theta$ होगा। यह सुगमता से दिखाया जा सकता है कि अन्तिम पद का मान निम्न है

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\lfloor n}{\lfloor \frac{n-1}{2} \; \lfloor \frac{n+1}{2}} \cdot \sin\theta,$$

अर्थात्
$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{n(n-1)\ldots\ldots\frac{1}{2}(n+3)}{\lfloor \frac{1}{2}(n-1)} \sin\theta.$$

उदाहरण १। $\sin^5\theta \cos^3\theta$ का θ के अपवर्त्यों के sines की श्रेणी में विस्तार करो।

हम जानते हैं कि

$$(2\,i\sin\theta)^5\,(2\cos\theta)^3 = \left(x-\frac{1}{x}\right)^5 \cdot \left(x+\frac{1}{x}\right)^3.$$

पहले हम $\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$ का विस्तार करके, केवल गुणांकों को निम्न प्रकार से लिखें

$$1-5+10-10+5-1$$

गुणांकों को प्राप्त करने की एक सुगम विधि इस प्रकार है

$$(1+x)^0 = 1$$
$$(1+x)^1 = 1+1$$
$$(1+x)^2 = 1+2+1$$
$$(1+x)^3 = 1+3+3+1$$
$$(1+x) \;= 1+4+6+4+1$$
$$(1+x)^5 = 1+5+10+10+5+1$$

जहाँ दाहिने पक्षों में पदों के केवल गुणांक ही लिखे गये हैं।

$(1+x)^2$ के विस्तार से प्रकट है कि $(1+x)^1$ के गुणांकों को लिख कर दाहिनी ओर के गुणांक को उसके बाईं ओर वाले गुणांक में जोड़ कर रख देते हैं।

$(1+x)^1$ का प्रथम तथा अन्तिम गुणांक वैसे ही रहता है। इसी प्रकार $(1+x)^3$ के प्रसार में प्राप्त गुणांकों को $(1+x)^2$ के गुणांकों की सहायता से लिखते हैं।

यदि $(1-x)^5$ के प्रसार के गुणांक लिखने हों, तो $(1+x)^5$ के प्रसार के गुणांकों के चिन्ह एकान्तर क्रम से धन तथा ऋण कर देते हैं।

अस्तु $\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$ के विस्तार में गुणांक निम्न हैं

$$1-5+10-10+5-1$$

अब $\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$ को उपर्युक्त विधि से $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ से तीन बार गुणा करके गुणांकों को इस प्रकार लिखेंगे।

$$\begin{array}{l} 1-5+10-10+5-1 \\ \hline 1-4+5+0-5+4-1 \\ 1-3+1+5-5-1+3-1 \\ 1-2-2+6+0-6+2+2-1 \end{array}$$

अब समान घात वाले अथवा मध्य पद से दोनों ओर समान दूरी वाले पदों को एक साथ रखने पर

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^5\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=\left(x^8-\frac{1}{x^8}\right)-2\left(x^6-\frac{1}{x^6}\right)$$
$$-2\left(x^4-\frac{1}{x^4}\right)+6\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right).$$

अब $(2i\sin\theta)^5(2\cos\theta)^3=2^5 i\sin^5\theta . 2^3\cos^3\theta$

अतः $2^8 i\ \sin^5\theta\sin^3\theta=(2\,i\sin 8\theta)-2\ (2\,i\sin 6\theta)-$
$$2\ (2\,i\sin 4\theta)+6\ (2\,i\ \sin 2\theta)$$

या $2^7\sin^5\theta\sin^3\theta=\sin 8\theta-2\sin 6\theta-2\sin 4\theta+6\sin 2\theta$

$$\therefore\ \sin^5\theta\sin^3\theta=\frac{1}{2^7}[\sin 8\theta-2\sin 6\theta-2\sin 4\theta+6\sin 2\theta].$$

उदाहरण २। $\sin^4\theta\ \cos^2\theta$ का विस्तार θ के अपवर्त्यों के cosines की श्रेणी में करो।

हमें विदित है कि

$$(2i \ \sin\theta)^4 \ (2 \cos\theta)^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^4 . \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 .$$

अब $\left(x - \frac{1}{x}\right)^4$ के विस्तार में प्राप्त गुणांक निम्न है

$$1 - 4 + 6 - 4 + 1$$

इसे दो बार $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ से गुणा करने पर निम्न गुणांक प्राप्त होंगे

$$\begin{array}{l} 1-4+6-4+1 \\ \hline 1-3+2+2-3+1 \\ 1-2-1+4-1-2+1 \end{array}$$

अब प्रथम तथा अन्तिम, दूसरे तथा अन्त से दूसरे गुणांक, आदि, गुणांकों को साथ रखने पर

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^4 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4 .$$

समीकरण के दोनों तरफ मान रखने पर

$$2^6 \sin^4\theta \cos^2\theta = (2 \cos 6\theta) - 2 (2 \cos 4\theta) - (2 \cos 2\theta) + 4$$

अथवा $\sin^4\theta \cos^2\theta = \frac{1}{2^5} [\cos 6\theta - 2 \cos 4\theta - \cos 2\theta + 2].$

उदाहरण ३ । $\sin^5\theta$ का θ के अपवर्त्यों के sines की श्रेणी में विस्तार करो ।

हमें विदित है कि

$$(2 \, i \sin\theta)^5 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^5 ,$$

$$= x^5 - 5x^3 + 10x - \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} - \frac{1}{x^5} ,$$

$$= \left(x^5 - \frac{1}{x^5}\right) - 5\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) + 10\left(x - \frac{1}{x}\right) ,$$

$$= (2 \, i \sin 5\theta) - 5 (2 \, i \sin 3\theta) + 10 (2 \, i \sin\theta).$$

अतएव $\sin^5\theta = \dfrac{1}{2^4}[\sin 5\theta - 5 \sin 3\theta + 10 \sin\theta]$.

$\theta=\pi/2$ की स्थानापत्ति करके इस परिणाम की पुष्टि करो ।

उदाहरण ४ । $\cos^5\theta$ का θ के अपवर्त्यों के cosines की श्रेणी में विस्तार करो ।

हमें विदित है कि

$$(2\cos\theta)^5 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^5,$$

$$= x^5+5x^3+10\,x+\frac{10}{x}+\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^5},$$

$$= \left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+5\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+10\left(x+\frac{1}{x}\right),$$

$$= (2\cos 5\theta)+5\,(2\cos 3\theta)+10\,(2\cos\theta) .$$

अतएव $\cos^5\theta = \dfrac{1}{2^4}[\cos 5\theta+5\cos 3\theta+10\cos\theta]$.

इसमें $\theta=0$ रखकर इस परिणाम की पुष्टि करो ।

उदाहरण

निम्न का विस्तार θ के अपवर्त्यों के cosines एवं sines की श्रेणी में करो —

1. $\sin^6\theta.\ \cos^6\theta.$ [इलाहाबाद, १९४२]
2. $\sin^5\theta\ \cos^2\theta.$ [बनारस, १९४९]
3. $\cos^5\theta\ \sin^7\theta.$ [आगरा, १९४१]
4. $\sin^5\theta\ \cos^4\theta.$
5. सिद्ध करो

$$\cos^3\theta\,\sin^4\theta = \frac{1}{64}\left\{\cos 7\theta-\cos 5\theta-3\cos 3\theta+3\cos\theta\right\}$$

इस परिणाम में $\theta=\pi/4$ रखकर इसकी पुष्टि करो ।

6. $\cos^4\theta$ तथा $\sin^4\theta$ का विस्तार θ के अपवर्त्यों के cosines की श्रेणी में करो ।

7. $(\sin\theta)^{4n+1}$ का विस्तार θ के अपवर्त्यों के sines की श्रेणी में करो।

३.०४ . $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ एवं $\tan n\theta$ का विस्तार, जहाँ n एक घनात्मक पूर्ण संख्या है।

हमें विदित है कि

$$(\cos n\theta + i \sin n\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$
$$= (C + i S)^n$$

जहाँ $C = \cos\theta$ तथा $S = \sin\theta$ मान लिया है।

द्विपद विस्तार से

$$(C+iS)^n = C^n + {}^nC_1\, C^{n-1}.\,(iS) + {}^nC_2.\, C^{n-2}\,(iS)^2 + {}^nC_3\, C^{n-3}\,(iS)^3 + {}^nC_4\, C^{n-4}\,(iS)^4 + \ldots\ldots$$
$$= [C^n - {}^nC_2\, C^{n-2}.\, S^2 + {}^nC_4\, C^{n-4}.\, S^4 \ldots\ldots\ldots] + i\,[{}^nC_1\, C^{n-1}.S - {}^nC_3\, C^{n-3}.\, S^3 + \ldots\ldots\ldots]$$

अब दोनों पक्षों के वास्तविक तथा काल्पनिक अंशों को बराबर करने पर

$$\cos n\theta = C^n - {}^nC_2\, C^{n-2}\, S^2 + {}^nC_4\, C^{n-4}.\, S^4 - \ldots\ldots \quad (1)$$
$$\sin n\theta = {}^nC_1\, C^{n-1}.\, S - {}^nC_3\, C^{n-3}.\, S^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

इसमें C और S का मान रखने पर हमें $\cos n\theta$ एवं $\sin n\theta$ का विस्तार प्राप्त होता है।

(1) और (2) को हम निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं

$$\cos n\theta = (\cos\theta)^n\,[1 - {}^nC_2 \tan^2\theta + {}^nC_4 \tan^4\theta - \ldots], \quad (3)$$
$$\sin n\theta = (\cos\theta_n)\,[{}^nC_1 \tan\theta - {}^nC_3 \tan^3\theta + \ldots\ldots] \quad (4)$$

अब (4) को (3) से भाग देने पर

$$\tan n\theta = \frac{{}^nC_1 \tan\theta - {}^nC_3 \tan^3\theta + \ldots\ldots\ldots}{1 - {}^nC_2 \tan^2\theta + {}^nC_4 \tan^4\theta - \ldots\ldots} \quad (5)$$

३.०५ . $\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots\ldots\ldots + \theta_n)$ का विस्तार।

मिश्र काल्पनिक राशियों के गुणन से हमें ज्ञात है कि

$$\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots\ldots\ldots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots\ldots + \theta_n)$$
$$= (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\ldots\ldots (\cos\theta_n + i \sin\theta_n)$$

$$= \cos\theta_1 . \cos\theta_2 . \cos\theta_3 \ldots \cos\theta_n (1+i\tan\theta_1)(1+i\tan\theta_2)\ldots\ldots(1+i\tan\theta_n)$$

$$= \cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_n (1+i s_1+i^2 s_2+i^3 s_3+ i^r s_r + \ldots\ldots) \ldots (1)$$

जहाँ s_r से $\tan\theta_1, \tan\theta_2, \ldots\ldots, \tan\theta_n$ में से r के विभिन्न गुणनफलों के योग को सूचित करते हैं। जैसे

$$s_1 = \tan\theta_1 + \tan\theta_2 + \ldots\ldots + \tan\theta_n,$$
$$s_2 = \tan\theta_1 \tan\theta_2 + \tan\theta_1 \tan\theta_3 + \tan\theta_2 \tan\theta_3 + \ldots$$
$$s_3 = \tan\theta_1 \tan\theta_2 \tan\theta_3 + \tan\theta_1 \tan\theta_2 \tan\theta_4 + \ldots$$

....

....

अब (1) के दोनों पक्षों में वास्तविक एवं काल्पनिक राशियों को बराबर करने पर

$$\cos(\theta_1+\theta_2+\ldots\ldots\theta_n) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots\ldots \cos\theta_n (1-s_2+s_4-s_6+\ldots\ldots), \quad (2)$$

एवं $$\sin(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_n (s_1-s_3+s_5-\ldots)\ldots(3)$$

समीकरण (3) को (2) से भाग देने पर

$$\tan(\theta_1+\theta_2+\ldots\ldots+\theta_n) = \frac{s_1-s_3+s_5\ldots\ldots}{1-s_2+s_4-\ldots\ldots} \quad (4)$$

इस परिणाम की विशिष्ट स्थिति में

$$\tan(\theta+\phi) = \frac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi},$$

तथा $$\tan(\theta+\phi+\psi) = \frac{\tan\theta+\tan\phi+\tan\psi-\tan\theta\tan\phi\tan\psi}{1-\tan\theta\tan\phi-\tan\phi\tan\psi-\tan\psi\tan\theta}.$$

यदि $\theta+\phi+\psi=\pi$, तो

$$\tan\theta+\tan\phi+\tan\psi = \tan\theta.\tan\phi.\tan\psi.$$

उप-सिद्धान्त —जब $\theta_1=\theta_2=\theta_3=\ldots\ldots=\theta_n=\theta$

तो $s_1 = n\tan\theta = {}^nC_1 \tan\theta,$

जैसे $s_2 = {}^nC_2 \tan^2\theta,$

$$S_3 = {}^nC_3 \tan^3\theta,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

अतएव परिणाम (4) से

$$\tan n\theta = \frac{{}^nC_1 \tan\theta - {}^nC_3 \tan^3\theta + \dots\dots\dots}{1 - {}^nC_2 \tan^2\theta + {}^nC_4 \tan^4\theta - \dots\dots}.$$

यह वही परिणाम है जो § ३·०४ के (5) में प्राप्त हुआ था।

३.०६. $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ का $\cos\theta$ तथा $\sin\theta$ की श्रेणियों में पृथक पृथक विस्तार करना।

मान लें कि n एक धनात्मक पूर्ण संख्या है तथा

$$C = \cos\theta, \; S = \sin\theta .$$

§ ३.०४ के समीकरण (1) से हमें ज्ञात है कि

$$\cos n\theta = C^n - {}^nC_2\, C^{n-2} . S^2 + {}^nC_4\, C^{n-4} . S^4 - \dots\dots \quad (1)$$

इसमें $S^2 = 1 - C^2$, $S^4 = (1 - C^2)^2$, आदि रखने पर,

$$\cos n\theta = C^n - {}^nC_2\, C^{n-2}(1 - C^2) + {}^nC_4\, C^{n-4}(1 - C^2)^2 - \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

अतएव $\cos n\theta$ केवल $\cos\theta$ का बहुपद है, जिसकी कोटि n है।

अर्थात्
$$\cos n\theta = A_n C^n + A_{n-2} C^{n-2} + A_{n-4} C^{n-4} + \dots\dots\dots + A_{n-2r} C^{n-2r} + \dots\dots\dots \quad (3)$$

यदि n विषम है, तो अन्तिम पद $A_1 C$, तथा यदि n सम है, तो यह पद A_0 होगा जहाँ $A_0, A_1, \dots . A_n$ अचर हैं।

क्योंकि श्रेणी (3) अनन्त श्रेणी नहीं है, इसलिए इसे अवकलित कर सकते हैं। θ के अपेक्षया अवकलन पर

$$-n \sin n\theta = -\sin\theta\, [n A_n C^{n-1} + (n-2) A_{n-2} C^{n-3} + \dots . + (n-2r) A_{n-2r} C^{n-2r-1} + \dots\dots\dots] . \quad (4)$$

अतः $\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ केवल $\cos\theta$ का वहुपद है, जिसकी कोटि $(n-1)$ है। इसलिये

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = B_{n-1}C^{n-1} + B_{n-3}C^{n-3} + B_{n-5}C^{n-5} + \ldots\ldots$$
$$+ B_{n-2r-1}C^{n-2r-1} + \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

इसमें यदि n विषम है, तो अन्तिम पद B_0, तथा यदि n सम है तो यह पद B_1C होगा, जहाँ $B_0, B_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots B_{n-1}$ अचर हैं।

अव θ के स्थान पर $\pi/2-\theta$ रखने पर हमें विभिन्न फल प्राप्त होते हैं—

(i) यदि n सम है, तो

$$(-1)^{n/2}\cos n\theta = A_n S^n + A_{n-2}S^{n-2} + \ldots + A_{n-2r}S^{n-2r}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots + A_0, \quad (6)$$

तथा $$(-1)^{n/2-1}\frac{\sin n\theta}{\cos\theta} = B_{n-1}S^{n-1} + B_{n-3}S^{n-3} + \ldots\ldots$$
$$+ B_{n-2r-1}S^{n-2r-1} + \ldots\ldots + B_0 S - \quad (7)$$

(ii) यदि n विषम है, तो

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin n\theta = A_n S^n + A_{n-2}S^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A_{n-2r}S^{n-2r} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_1 S \quad (8)$$

तथा $$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\cos n\theta}{\cos\theta} = B_{n-1}S^{n-1} + B_{n-3}S^{n-3} + \ldots$$
$$+ B_{n-2r-1}S^{n-2r-1} + \ldots + B_0 \quad (9)$$

विशिष्ट दशाओं में, जव $n = 2, 3, \ldots\ldots$ हमें विदित है कि

$$\cos 2\theta,\ \cos 3\theta,\ \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta},\ \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta},$$

केवल $\cos\theta$ के वहुपद हैं, तथा

$$\cos 2\theta,\ \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta},\ \sin 3\theta,\ \frac{\sin 2\theta}{\cos\theta},$$

केवल $\sin\theta$ के वहुपद हैं।

इनसे उपर्युक्त परिणामों की पुष्टि हो सकती है।

३.०७ . क्रमागत गुणांकों में संबंध ।

क्योंकि $\cos n\theta = A_n C^n + A_{n-2} C^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \Sigma (A_r C^r) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$

इसे θ के अपेक्षया दो वार अवकलित करने पर

$$-n^2 \cos n\theta = \frac{d^2}{d\theta^2} [\Sigma(A_r C^r)]$$

$$= \frac{d}{d\theta} [\Sigma(-r A_r C^{r-1}.S]$$

जहाँ $\frac{d}{d\theta}(C) = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta) = - \sin\theta = -S$ आदि ।

अत: $-n^2 \cos n\theta = [\Sigma \{ -rA_r C^r + r(r-1) A_r C^{r-2}. S^2 \}]$

$= -\Sigma \{ rA_r C^r - r(r-1) A_r C^{r-2}. (1-C^2) \}$

अथवा $n^2 \cos n\theta = \Sigma \{ r^2 A_r C^r - r(r-1) A_r C^{r-2} \}$.

$\therefore\ n^2 \cos n\theta = n^2 \Sigma A_r C^r = \Sigma \{ r^2 A_r C^r - r(r-1) A_r C^{r-2} \}$.

अब C^r के गुणांकों को बराबर करने पर

$$n^2 A_r = r^2 A_r - (r+2)(r+1) A_{r+2} .$$

अतएव $A_{r+2} = -\frac{n^2 - r^2}{(r+2)(r+1)} A_r . \qquad \ldots\ldots (2)$

इसी प्रकार § ३.०६ के प्रत्येक परिणाम के लिये गुणांकों में संबंध स्थापित किया जा सकता है। इन संबंधों की सहायता से एक गुणांक ज्ञात होने पर सभी गुणांक प्राप्त किये जा सकते हैं। इसके लिये सर्वप्रथम अथवा अन्तिम गुणांक विदित होना आवश्यक है। प्रथम गुणांक ज्ञात होने पर अवरोहि क्रम तथा अन्तिम गुणांक ज्ञात होने पर आरोह क्रम से श्रेणी प्राप्त होगी ।

३.०८—प्रथम तथा अंतिम गुणांक ज्ञात करने की विधि ।

स्थिति १ —

हमें ज्ञात है कि

$$\cos n\theta = \Sigma A_r C^r = C^n - {}^nC_2\, C^{n-2}.(1-C^2) + {}^nC_4\, C^{n-4}(1-C^2)^2$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$(\cos\theta)^n$ अर्थात C^n के गुणांकों को बराबर करने पर

$$A_n = 1 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \dots\dots\dots\dots$$
$$= \tfrac{1}{2}\{(1+1)^n + (1-1)^n\}$$
$$= 2^{n-1}.$$

पुनः यदि n सम है, तो § ३.०६ के (3) में $\theta = \pi/2$ रखने पर हमें प्राप्त होता है

$$A_0 = \cos\frac{n\pi}{2} = (-1)^{n/2}.$$

यदि n विषम है, तो

$$A_1 = \lim_{\theta\to\pi/2} \frac{\cos n\theta}{\cos\theta}$$
$$= \lim_{\phi\to 0} \frac{\cos n(\pi/2-\phi)}{\cos(\pi/2-\phi)}$$
$$= \lim_{\phi\to 0} \frac{\sin(n\pi/2)\sin n\phi}{\sin\phi}$$

$$= n(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

स्थिति २— $\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ के विस्तार के लिये § ३.०६ के समीकरण (4) तथा (5) से प्रकट है कि

$$B_{n-1} = A_n = 2^{n-1}, \text{ स्थिति १ से ।}$$

अब यदि n सम है, तो

$$B_1 = \lim_{\theta\to\pi/2} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$= \lim_{\phi\to 0} \frac{\sin n(\pi/2-\phi)}{\cos(\pi/2-\phi)}$$

$$= \lim_{\phi\to 0} \frac{-\cos\frac{n\pi}{2}\sin n\phi}{\sin\phi}$$
$$= -n(-1)^{n/2}$$

पुनः यदि n विषम है, तो

$$B_0 = \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\sin \pi/2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} .$$

स्थिति ३— § ३.०६ के विस्तार (6) से (9) तक में प्रथम एवं अन्तिम गुणांक उपर्युवत रीति से ज्ञात किये जा सकते हैं। ये गुणांक स्थिति (१) तथा (२) के परिणामों से θ के स्थान पर $(\pi/2-\theta)$ लिख कर भी प्राप्त किये जा सकते हैं।

टिप्पणी—क्योंकि $B_{n-1}=A_n=2^{n-1}$,

इसलिये प्रत्येक अवस्था में उच्चतम कोटि के पद का गुणांक 2^{n-1} होता है। गुणांक का चिन्ह निर्धारित करने के लिए हम निम्न विशिष्ट फलों पर विचार कर सकते हैं।

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos \theta} = 2 \sin\theta,$$

और
$$\frac{\sin 4\theta}{\cos \theta} = -8 \sin^3\theta + 4 \sin\theta .$$

इनसे प्रकट है कि $\sin n\theta/\cos \theta$ के उच्चतम गुणांक का चिन्ह $(-1)^{\frac{n}{2}-1}$ है, जब n सम है।

गत प्रकरणों में प्राप्त परिणाम केवल तभी सार्थक हैं जब n एक धनात्मक पूर्ण संख्या है। यदि n एक भिन्न हो, तो उपर्युक्त श्रेणियाँ अनन्त होंगी। उनका विवेचन हम यहाँ नहीं करेंगे।

३.०९ उपर्युक्त से हमें जो परिणाम प्राप्त होते हैं वे अत्यन्त महत्वपूर्ण हैं :

स्थिति १—जब n एक सम पूर्ण संख्या है,

$$\text{(i)} \quad \cos n\theta = 1 - \frac{n^2}{2!} \sin^2\theta + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!} \sin^4\theta - \ldots\ldots\ldots, \quad (1)$$

$$\text{(ii)} \quad \sin n\theta = n \cos\theta \left[\sin\theta - \frac{(n^2-2^2)}{3!} \sin^3\theta + \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!} \sin^5\theta + \ldots\ldots\ldots\ldots\right]. \quad (2)$$

स्थिति २—जब n एक विषम पूर्ण संख्या है,

$$\text{(i)} \quad \sin n\theta = n\sin\theta - \frac{n(n^2-1^2)}{3!}\sin^3\theta + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5\theta - \ldots\ldots\ldots, \quad (3)$$

$$\text{(ii)} \quad \cos n\theta = \cos\theta\left[1 - \frac{(n^2-1^2)}{2!}\sin^2\theta + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{4!}\sin^4\theta - \ldots\right]. \quad (4)$$

इन परिणामों में θ के स्थान पर $\pi/2-\theta$ रखने पर हमें चार निम्न परिणाम भी प्राप्त होते हैं :

स्थिति १—जब n एक सम पूर्ण संख्या है ,

$$\text{(i)} \quad (-1)^{n/2}\cos n\theta = 1 - \frac{n^2}{2!}\cos^2\theta + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\cos^4\theta - \ldots\ldots\ldots, \quad (5)$$

$$\text{(ii)} \quad (-1)^{n/2+1}\sin n\theta = n\sin\theta\left[\cos\theta - \frac{(n^2-2^2)}{3!}\cos^3\theta + \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!}\cos^5\theta - \ldots\ldots\right].. \quad (6)$$

स्थिति २—जब n एक विषम पूर्ण संख्या है,

$$\text{(i)} \quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos n\theta = n\cos\theta - \frac{n(n^2-1^2)\cos^3\theta}{3!} + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}\cos^5\theta - \ldots\ldots\ldots, \quad (7)$$

$$\text{(ii)} \quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin n\theta = \sin\theta\left[1 - \frac{(n^2-1^2)}{2!}\cos^2\theta + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{4!}\cos^4\theta - \ldots\ldots\right]. \quad (8)$$

टिप्पणी—यदि $y= \sin n\theta$, तथा $\theta=\sin^{-1}x$,

तो $$\cos\theta . \frac{dy}{dx} = n \cos n\theta,$$

तथा $$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y^2=0 .$$

इस अवकल समीकरण को लायवनीज के प्रमेय से p वार अवकलित करने पर हमें $x=0$, पर निम्न प्राप्त होगा

$$(y_{p+2})_0 = (p^2-n^2)(y_p)_0$$

इससे y के विभिन्न अवकल गुणांकों का मान $x=0$ पर प्राप्त होगा। अव मैकलॉरिन के विस्तार से हमें पूर्वगामी परिणाम (3) प्राप्त हो जायगा, और उसके अवकलन से परिणाम (4) भी प्राप्त हो जायगा।

इसी प्रकार यदि $y=\cos n\theta$, जहाँ $\theta= \sin^{-1}x$, तो मैकलॉरिन के विस्तार से हमें परिणाम (1) तथा उसके अवकलन से (2) प्राप्त हो जायगा।

उदाहरण १। सिद्ध करो

$$(1+\cos 10\theta) =2 [16 \cos^5\theta-20 \cos^3\theta+5 \cos\theta]^2 .$$

हमें विदित है कि

$$(1+\cos 10\theta) = 2 \cos^2 5\theta$$
$$=2 [\cos^5\theta-{}^5C_2\cos^3\theta \sin^2\theta + {}^5C_4 \cos\theta \sin^4\theta]^2$$
$$=2 [\cos^5\theta-10 \cos^3\theta (1-\cos^2\theta)+ 5 \cos\theta (1-\cos^2\theta)^2]^2$$
$$=2 [\cos^5\theta+10 \cos^5\theta-10 \cos^3\theta+5 \cos^5\theta -10 \cos^3\theta +5 \cos\theta]^2$$
$$=2 [16 \cos^5\theta-20 \cos^3\theta+5 \cos\theta]^2.$$

उदाहरण २। सिद्ध करो

$$\sec\theta \cos 5\theta=1-12 \sin^2\theta + 16 \sin^4\theta.$$

हमें ज्ञात है कि

$$\cos 5\theta= \cos. (4\theta+\theta),$$
$$= \cos 4\theta \cos\theta- \sin 4\theta \sin\theta,$$

$$= (1-2\sin^2 2\theta)\cos\theta - 2.2.\sin^2\theta\cos\theta\cos 2\theta,$$

$$= \cos\theta\,[1-8\sin^2\theta\cos^2\theta - 4\sin^2\theta\,(1-2\sin^2\theta)],$$

$$= \cos\theta\,[1-8\sin^2\theta\,(1-\sin^2\theta) - 4\sin^2\theta + 8\sin^4\theta],$$

$$\cos 5\theta = \cos\theta\,[1-8\sin^2\theta + 8\sin^4\theta - 4\sin^2\theta + 8\sin^4\theta],$$

अत: $\sec\theta\cos 5\theta = 1 - 12\sin^2\theta + 16\sin^4\theta.$

उदाहरण ३। यदि $|x| < 1$, तो दिखाओ कि

$$\frac{1-x^2}{1-2x\cos\theta+x^2} = 1 + 2x\cos\theta + 2x^2\cos 2\theta + \ldots\ldots + 2x^n\cos n\theta + \ldots\ldots\ldots$$

[बनारस, १९५१]

मान लें $z = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad (1)$

तब $\frac{1}{z} = \cos\theta - i\sin\theta,$

जिससे $2\cos\theta = z + \frac{1}{z}, \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad (2)$

एवं $2\cos r\theta = z^r + \frac{1}{z^r}.$

अब $$\frac{1-x^2}{1-2x\cos\theta+x^2} = \frac{1-x^2}{1-x\left(z+\frac{1}{z}\right)+x^2},$$

$$= \frac{1-x^2}{(1-xz)\left(1-\frac{x}{z}\right)}$$

$$= \frac{1}{1-xz} + \frac{1}{1-\frac{x}{z}} - 1, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$= (1-xz)^{-1} + (1-x/z)^{-1} - 1. \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

द्विपद प्रमेय से (4) के विस्तार के लिए आवश्यक है कि

$|xz| < 1$, तथा $|x/z| < 1$,

अर्थात् $|x| < 1$, क्योंकि $|z| = (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 1$.

अतः $(1 - xz)^{-1} = 1 + xz + x^2z^2 + x^3z^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots,$

एवं $(1 - x/z)^{-1} = 1 + x/z + x^2/z^2 + x^3/z^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots.$

अस्तु $$\frac{1 - x^2}{1 - 2x\cos\theta + x^2} = -1 + 2 + x\left(z + \frac{1}{z}\right) +$$

$$x^2\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \ldots\ldots\ldots + x^r\left(z^r + \frac{1}{z^r}\right) + \ldots\ldots$$

$$= 1 + 2x\cos\theta + 2x^2\cos 2\theta + \ldots + 2x^r\cos r\theta + \ldots\ldots.$$

टिप्पणी--उपर्युक्त को सिद्ध करने के लिए हम यह भी दिखा सकते हैं कि

$$(1 - x^2) = (1 - 2x\cos\theta + x^2)(1 + 2x\cos\theta + 2x^2\cos 2\theta + \ldots\ldots\ldots)$$

इसके लिये हम दोनों ओर के x के समान घातों के गुणांक बराबर सिद्ध करते हैं।

उदाहरण ४। सिद्ध करो कि

$$\frac{\sin 7\theta}{\sin\theta} = 8\cos^3 2\theta + 4\cos^2 2\theta - 4\cos 2\theta - 1.$$

हमें विदित है कि

$$\sin 7\theta = {}^7C_1\cos^6\theta\sin\theta - {}^7C_3\cos^4\theta\sin^3\theta + {}^7C_5\cos^2\theta\sin^5\theta - \sin^7\theta,$$

$$= 7\cos^6\theta\sin\theta - 35\cos^4\theta(1 - \cos^2\theta)\sin\theta + 21\cos^2\theta(1 - \cos^2\theta)^2\sin\theta - (1 - \cos^2\theta)^3\sin\theta,$$

$$= \sin\theta\,[7\cos^6\theta + 35\cos^6\theta - 35\cos^4\theta + 21\cos^6\theta - 42\cos^4\theta + 21\cos^2\theta - 1 + 3\cos^2\theta - 3\cos^4\theta + \cos^6\theta]$$

अतः $$\frac{\sin 7\theta}{\sin\theta} = 64\cos^6\theta - 80\cos^4\theta + 24\cos^2\theta - 1,$$

$$= 8.(2\cos^2\theta)^3 - 20(2\cos^2\theta)^2 + 12.(2\cos^2\theta) - 1,$$

$$= 8(1 + \cos 2\theta)^3 - 20(1 + \cos 2\theta)^2 + 12(1 + \cos 2\theta) - 1,$$

$$= 8(1+3\cos 2\theta+3\cos^2 2\theta+\cos^3 2\theta)$$
$$-20(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)$$
$$+12(1+\cos 2\theta)-1,$$
$$= 8\cos^3 2\theta+4\cos^2 2\theta-4\cos 2\theta-1.$$

उदाहरण

1. $\cos 6\theta$ को $\cos\theta$ की श्रेणी में व्यक्त करो।

2. $\sin 5\theta$ का $\sin\theta$ की श्रेणी में विस्तार करो।

3. सिद्ध करो कि

$$\frac{\sin 6\theta}{\sin\theta} = 32\cos^5\theta-32\cos^3\theta+6\cos\theta.$$

4. दिखाओ कि

$$\frac{\sin 9\theta}{\sin\theta} = (C^2-1)(C^6-6C^4+9C^2-1),$$

जहाँ $C=2\cos\theta$.

5. यदि $C=2\cos\theta$, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{1+\cos 9\theta}{1+\cos\theta}=\left[C^4-C^3-3C^2+2C+1\right]^2.$$

6. $\tan 7\theta$ का विस्तार करो।

7. $\dfrac{(\cos\theta-x)}{1-2x\cos\theta+x^2}$ के विस्तार में x^n का गुणांक ज्ञात करो, जब कि $|x|<1$, .

8. निम्न का विस्तार θ के अपवर्त्यों के sines की श्रेणी में करो

$$\frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}.$$ [आगरा, १९४२]

9. यदि $-1<x<1$, तो सिद्ध करो कि

(i) $$\frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2} = 1+x\cos\theta+x^2\cos 2\theta+ x^3\cos 3\theta+\dots\dots\dots,$$

(ii) $$\frac{x \sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2} = x\sin\theta + x^2\sin 2\theta + x^3 \sin 3\theta + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

10. यदि x वास्तविक तथा $|x|<1$ है, तो

$$\frac{1+x\cos\theta}{1+2x\cos\theta+x^2}$$

का विस्तार एक अनन्त श्रेणी में करो। [बनारस, १९४३, आगरा, १९५०]

३.१०. cos α तथा sin α का α के घातों की श्रेणी में विस्तार —

हमें § ३.०४ से विदित है कि

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - {}^nC_2 \cos^{n-2}\theta.\sin^2\theta. + {}^nC_4 \cos^{n-4}\theta.\sin^4\theta \ldots\ldots\ldots$$

$$= \cos^n\theta - \frac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.}\cos^{n-4}\theta.\sin^4\theta - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

इस श्रेणी में $n\theta = \alpha$ रखने पर हमें निम्न प्राप्त होगा

$$\cos\alpha = \cos^n\theta - \frac{\frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{\alpha}{\theta}-1\right)}{1.2.}\cos^{n-2}\theta.\sin^2\theta + \frac{\frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{\alpha}{\theta}-1\right)\left(\frac{\alpha}{\theta}-2\right)\left(\frac{\alpha}{\theta}-3\right)}{1.2.3.4.}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \cos^n\theta - \frac{\alpha(\alpha-\theta)}{1.2.}\cos^{n-2}\theta\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 + \frac{\alpha(\alpha-\theta)(\alpha-2\theta)(\alpha-3\theta)}{1.2.3.4.}\cos^{n-4}\theta\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^4 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

इस समीकरण (1) में θ को अनिश्चित रूप से इस प्रकार कम करते जाओ कि n और θ का गुणन सदैव α ही रहे अत: n अनिश्चित रूप से बढ़ता जायगा और असीमित हो जायगा।

इस अवस्था में $\theta \to 0$, तथा $\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)$ एवं इसके अन्य घात $\to 1$, तथा

$\cos\theta$ एवं इसके अन्य घात $\to 1$.

अत: समीकरण (1) का रूप निम्न हो जायगा

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ अनन्त तक}$$

इसी प्रकार $\sin\ \alpha$ की श्रेणी प्राप्त कर सकते हैं। § ३.०४ से हमें विदित है कि

$$\sin n\theta = {}^nC_1 \cos^{n-1}\theta.\ \sin\theta - {}^nC_3 \cos^{n-3}\theta\ \sin^3\theta + \ldots\ldots$$

इस श्रेणी में $n\theta = \alpha$ रखने पर हमें निम्न प्राप्त होगा

$$\sin\alpha = \frac{\alpha}{\theta}\cos^{n-1}\theta\ \sin\theta - \frac{\frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{\alpha}{\theta}-1\right)\left(\frac{\alpha}{\theta}-2\right)}{1.2.3.}\cos^{n-3}\theta\ \sin^3\theta +$$

$$\frac{\frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{\alpha}{\theta}-1\right)\left(\frac{\alpha}{\theta}-2\right)\left(\frac{\alpha}{\theta}-3\right)\left(\frac{\alpha}{\theta}-4\right)}{1.2.3.4.5.}\cos^{n-5}\theta\ \sin^5\theta - \ldots\ldots$$

$$= \alpha\cos^{n-1}\theta.\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) - \frac{\alpha(\alpha-\theta)(\alpha-2\theta)}{1.2.3.}\cos^{n-3}\theta\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-\theta)(\alpha-2\theta)(\alpha-3\theta)(\alpha-4\theta)}{1.2.3.4.5.}\cos^{n-5}\theta\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^5$$

$$- \ldots\ldots\ldots$$

पहले की ही भाँति θ को अनिश्चित रूप से इस प्रकार कम करो कि n और θ का गुणन सदैव α ही रहे। इस प्रकार n अनिश्चित रूप से बढ़ेगा और असीमित हो जायगा

अत: जब $\theta \to 0$,

$\left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right)$, एवं इसके अन्य घात $\rightarrow 1$. तथा $\cos \theta$, एवं इसके अन्य घात $\rightarrow 1$.

और समीकण का रूप निम्न हो जायगा

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ अनन्त तक}$$

टिप्पणी—इन प्रसारों को हम मैकलॉरिन के प्रमेय का प्रयोग करके भी ज्ञात कर सकते हैं।

टिप्पणी—$\sin(-\theta) = -\sin\theta$. पर $\cos(-\theta) = \cos\theta$, इसलिए $\sin\theta$ विषम फलन है तथा $\cos\theta$ सम फलन है।

$\sin\theta$ के विषम फलन होने के कारण इसके प्रसार में θ की केवल विषम घातों का ही समावेश है। इसके विपरीत $\cos\theta$ के सम होने के कारण इसके प्रसार में θ की केवल सम घातें ही उपस्थित हैं।

उदाहरण १। दिखाओ कि

$$\frac{1}{6}\sin^3\theta = \frac{\theta^3}{3!} - \frac{(1+3^2)}{5!}\theta^5 + \frac{(1+3^2+3^4)}{7!}\theta^7 - \ldots\ldots$$

[आगरा, १९३८]

हमें ज्ञात है कि

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

जिससे $\sin^3\theta = \frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta)$

अथवा $\frac{1}{6}\sin^3\theta = \frac{1}{8}\sin\theta - \frac{1}{24}\sin 3\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

अब $\sin\theta$ तथा $\sin 3\theta$ का θ की श्रेणी में विस्तार करने पर

$$\frac{1}{6}\sin^3\theta = \frac{1}{8}\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\right] - \frac{1}{24}\left[3\theta - \frac{3^3\theta^3}{3!} + \frac{3^5\theta^5}{5!} - \ldots\ldots\right],$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left\{\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\right\} - \left\{\theta - \frac{3^2}{3!}\theta^3 + \frac{3^4}{5!}\theta^5 - \ldots\ldots\right\}\right],$$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{(3^2-1)}{3!}\theta^3-\frac{(3^4-1)}{5!}\theta^5+\frac{(3^6-1)}{7!}\theta^7-\ldots\ldots\right],$$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{(3^2-1)}{3!}\theta^3-\frac{(3^2-1)(3^2+1)}{5!}\theta^5+\frac{(3^2-1)(3^4+3^2+1)}{7!}\theta^7-\ldots\ldots\right].$$

अतः $\quad \frac{1}{6}\sin^3\theta=\frac{\theta^3}{3!}-\frac{(1+3^2)}{5!}\theta^5+\frac{(1+3^2+3^4)}{7!}\theta^7-\ldots$

उदाहरण २। यदि $\sin^{-1}(x+h)=A+Bh+Ch^2+\ldots\ldots\ldots$ जहाँ $A, B, C, \ldots$ आदि में h नहीं है, तो दिखाओ कि

$$\sin A=x,\text{ तथा } B=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

दत्त श्रेणी में $h=0$ रखने पर

$$\sin^{-1}x=A,$$

अथवा
$$\sin A=x.$$

पुनः श्रेणी को h के अपेक्षया अवकलित करने पर

$$\frac{1}{\sqrt{1-(x+h)^2}}=B+2Ch+\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

जिसमें $h=0$, रखने पर

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=B.$$

विकल्प विधि —हमें दिया हुआ है कि

$$\sin^{-1}(x+h)=A+Bh+Ch^2+\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

अथवा
$$x+h=\sin\{A+(Bh+Ch^2+\ldots\ldots\ldots)\}$$

$$=\sin A\cos(Bh+Ch^2+\ldots\ldots)+\cos A\sin(Bh+Ch^2+\ldots\ldots)$$

$$=\sin A\left[1-\frac{(Bh+Ch^2+\ldots\ldots)^2}{2!}+\ldots\ldots\right]$$

$$+\cos A\left[(Bh+Ch^2+\ldots\ldots)-\frac{(Bh+Ch^2+\ldots\ldots)^3}{3!}+\ldots\ldots\right]$$

$= \sin A+Bh\cos A+(h)$ के उच्चतर घात.

अब दोनों पक्षों में h के समान घातों के गुणांक बराबर करने पर

$x=\sin A$ तथा $1=B\cos A$

अथवा $$B=\frac{1}{\cos A}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

उदाहरण ३ । सिद्ध करो कि

$$\theta\sec\theta=\sin\theta+\tfrac{2}{3}\sin^3\theta+\frac{2.4}{3.5}\sin^5\theta+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

हमें विदित है कि n के किसी मान के लिए

$$\sin n\theta=n\cos\theta\left[\sin\theta-\frac{n^2-2^2}{3!}\sin^3\theta+\frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!}\sin^5\theta+\ldots\ldots\right] \quad (1)$$

पुनः $$\sin n\theta\sec\theta=\sec\theta\left[n\theta-\frac{n^3\theta^3}{3!}+\frac{n^5\theta^5}{5!}-\ldots\ldots\right] \quad (2)$$

(2) तथा (1) में n के गुणांक बराबर करने पर

$$\theta\sec\theta=\sin\theta+\frac{2^2}{3!}\sin^3\theta+\frac{2^2.4^2}{5!}\sin^5\theta+\ldots\ldots$$

अथवा $$\theta\sec\theta=\sin\theta+\tfrac{2}{3}\sin^3\theta+\frac{2.4}{3.5}\sin^5\theta+\ldots\ldots$$

उदाहरण ४ । सिद्ध करो कि

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{\sin bx}=\frac{a}{b}.$$

हमें विदित है कि $$\frac{e^{ax}-1}{\sin bx}=\frac{1+ax+a^2x^2/2!+\ldots\ldots-1}{bx-b^3x^3/3!+\ldots\ldots\ldots}$$

$$=\frac{a+a^2x/2!+\ldots\ldots}{b-b^3x^2/3!+\ldots\ldots}$$

अतः $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{ax}-1}{\sin bx} = \dfrac{a}{b}$.

उदाहरण

सिद्ध करो कि

1. $\cos^3\theta = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{3+3^{2n}}{4} \cdot \dfrac{\theta^{2n}}{\lfloor 2n}$.

2. $\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 = 2\left[\dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{4!}(2\theta)^2 + \dfrac{1}{6!}(2\theta)^4 - \ldots\right]$.

3. $4\cos\theta\sin^2\theta = \dfrac{1}{2!}\theta^2(3^2-1) - \dfrac{1}{4!}\theta^4(3^4-1) + \ldots$

4. $2\sin(\pi/3+\theta/2)\cos(\pi/6+\theta/2) = \dfrac{3}{2} + \sum_{1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\theta^{2n}}{(2n)!}$

5. $\cos^2\theta = 1 - \dfrac{2\theta^2}{2!} + \dfrac{2^3\theta^4}{4!} - \dfrac{2^5\theta^6}{6!} + \ldots\ldots$

6. $\sin^2\theta = \dfrac{2\theta^2}{2!} - \dfrac{2^3\theta^4}{4!} + \dfrac{2^5\theta^6}{6!} - \ldots\ldots$

7. यदि x और α वास्तविक हों, तो दिखाओ कि

(i) $\cos(x+\alpha) = \cos\alpha - \dfrac{x}{\lfloor 1}\sin\alpha - \dfrac{x^2}{\lfloor 2}\cos\alpha + \dfrac{x^3}{\lfloor 3}\sin\alpha + \ldots\ldots$

तथा (ii) $\sin(x+\alpha) = \sin\alpha + \dfrac{x}{\lfloor 1}\cos\alpha - \dfrac{x^2}{\lfloor 2}\sin\alpha - \dfrac{x^3}{\lfloor 3}\cos\alpha + \ldots\ldots$

[टेलर के प्रमेय से भी ये परिणाम ज्ञात करो।]

8. यदि $\tan\theta = \theta$, तो सिद्ध करो कि $\theta = \cdot 7$, लगभग; यह भी दिखाओ कि निकटतम मान लेने पर $\theta = \cdot 74$.

9. यदि $\theta = \pi/6$, तथा $\cos\theta$ के लिये केवल $(1 - \frac{\theta^2}{2})$ लिया जाय, तो प्रतिशत भूल ज्ञात करो, जहाँ $\pi^2 = 9.8696$.

10. यदि x घनात्मक हो, तो सिद्ध करो कि

$$\cos x > 1 - x .$$

निम्न के मान निकालो—

11. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$.

12. $\lim_{x \to 0} \left[\frac{\tan x}{x}\right]^{1/x}$.

13. $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

सिद्ध करो कि

14. $\lim_{x \to \pi/2} (\sin x)^{\tan x} = 1$.

15. $\lim_{\theta \to 0} \frac{3 \sin\theta - \sin 3\theta}{\theta - \sin\theta} = 24$.

अध्याय ३ पर उदाहरण

सिद्ध करो

1. $\sin 9\theta = \sin\theta[256 \cos^8\theta - 448 \cos^6\theta + 240 \cos^4\theta - 40 \cos^2\theta + 1]$.

2. $\cos 7\theta = 64 \cos^7\theta - 112 \cos^5\theta + 56 \cos^3\theta - 7 \cos\theta$.

3. $\cos^{10}\theta = \frac{1}{512} [\cos 10\theta + 10 \cos 8\theta + 45 \cos 6\theta + 120 \cos 4\theta + 210 \cos 2\theta + 126]$.

4. $-2^{10} \sin^3\theta \cos^3\theta = \sin 11\theta + 5 \sin 9\theta + 7 \sin 7\theta - 5 \sin 5\theta - 22 \sin 3\theta - 14 \sin\theta$.

5. निम्न का विस्तार θ के अपवर्त्यों के sines तथा cosines की श्रेणी में करो

$$\frac{x \cos \theta}{1-2x \sin\theta+x^2}.$$

6. निम्न का विस्तार θ के अपवर्त्यों के cosines की श्रेणी में करो

$$\frac{2 \cos \theta-2x}{1-2x \cos \theta+x^2}.$$

7. दिखाओ कि

$$\frac{\cos \phi - x\cos(\theta+\phi)}{1-2x \cos \theta+x^2} = \cos \phi + x \cos (\theta-\phi) + x^2\cos (2\theta-\phi) + \ldots\ldots .$$

निम्न का विस्तार अनन्त श्रेणी में करो

8. $$\frac{\cos \theta - a \cos (\theta-\phi)}{1-2a \cos \phi+a^2}.$$

9. $$\frac{\sin \theta - a \sin (\theta-\phi)}{1-2a \cos \phi+a^2}.$$

10. $$\frac{2 x \sin \theta \{1-x \cos \theta\}}{\{1-2 x \cos \theta+x^2\}^2}.$$

11. यदि $2n= (1+n^2) e$, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{1}{1+e \cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left\{1-2 n \cos \theta+2n^2 \cos 2\theta - \ldots\right\}$$

12. यदि $\tan x = a_1x + \frac{a_3 x^3}{3!} + \frac{a_5 x^5}{5!} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

तो दिखाओ कि

$$a_{2n+1} = \frac{(2 n+1) 2n}{1.2.} a_{2n-1} - \frac{(2n+1) 2n (2n-1) (2n-2)}{4!} a_{2n-3} + \ldots + \ldots\ldots + (-1)^{n+1} (2n+1) a_1 + (-1)^n .$$

13. सिद्ध करो कि

$$\tan x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

14. यह मान कर कि

$$\sin^{-1}x = a_1x + a_3x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

तथा इसमें x के स्थान पर ($x+h$) रखकर एवं h के गुणांक बराबर करके सिद्ध करो कि

$$\sin^{-1}x = x + \tfrac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

15. यदि $\sec\theta = a_0 + a_2\theta^2 + a_4\theta^4 + \ldots\ldots + a_{2n}\theta^{2n} + \ldots\ldots$ तो दिखाओ कि

$$a_{2n} = \frac{a_{2n-2}}{\lfloor 2} - \frac{a_{2n-4}}{\lfloor 4} + \ldots\ldots\ldots + \frac{(-1)^{n+1}a_2}{\lfloor 2n}.$$

16. सिद्ध करो कि

(i) $\tfrac{1}{2}\theta^2 = \tfrac{1}{2}\sin^2\theta + \tfrac{2}{3}\,\frac{\sin^4\theta}{4} + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot\,\frac{\sin^6\theta}{6} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(ii) $(\sin^{-1}x)^2 = x^2 + \tfrac{2}{3}\cdot\,\frac{x^4}{2} + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot\,\frac{x^6}{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

[संकेत—(i) में $\theta = \sin^{-1}x$ रख दो ।]

17. दिखाओ कि $\pi^2 = 18\sum\limits_{0}^{\infty}\frac{n!\,n!}{(2n+2)!}$.

[संकेत—16 (i) में θ के स्थान पर $\pi/6$ रख दो ।]

18. सिद्ध करो कि

(i) $\tfrac{1}{6}\theta^3 = \frac{1}{3!}\sin^3\theta + \frac{1^2+3^2}{5!}\sin^5\theta + \frac{1^2.3^2 + 1^2.5^2 + 3^2.5^2}{7!}\sin^7\theta + \ldots\ldots\ldots$

(ii) $\tfrac{1}{6}\,(\sin^{-1}x)^3 = \tfrac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2}\right)\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots\ldots\ldots$

19. किसी भी विधि से $(1-x^2)^{-1/2}\sin^{-1}x$ के विस्तार के प्रथम तीन पद ज्ञात करो। (यू० पी० सिविल सर्विस, १९४१]

20. सिद्ध करो कि

$$\tan^{-1}y=\frac{y}{1+y^2}\left[1+\tfrac{2}{3}\cdot\frac{y^2}{1+y^2}+\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{4}{5}\left(\frac{y^2}{1+y^2}\right)^2+\ldots\right].$$

21. यदि $x<\pi/4$, तो सिद्ध करो

(i) $\frac{1}{2}\sin^2 2x=2\tan^2 x-4\tan^4 x+6\tan^6 x-\ldots\ldots\ldots$

(ii) $\log\sec x=\frac{1}{2}\tan^2 x-\frac{1}{4}\tan^4 x+\frac{1}{6}\tan^6 x-\ldots\ldots$

22. सिद्ध करो कि समीकरण

$$a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta+2\,ag\cos\theta+2\,bf\sin\theta+c=0$$

के 4 मूल होंगे और θ के उन मानों का योग जो समीकरण को संतुष्ट करते हैं 2π का अपवर्त्य होगा।

23. सिद्ध करो

$$1-\frac{m^2}{2!}+\frac{m^2(m^2-1^2)}{4!}-\frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-2^2)}{6!}+\ldots\ldots\ldots\ldots=\cos\frac{m\pi}{3}.$$

24. सिद्ध करो

$$1-\frac{m^2-1^2}{3!}+\frac{(m^2-1^2)(m^2-2^2)}{5!}-\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{m}\sin\tfrac{1}{3}m\pi\operatorname{cosec}\tfrac{1}{3}\pi.$$

अध्याय ४

समीकरण के हल

४.०१. अध्याय २ में द-मायवर के प्रमेय के विवेचन के साथ हमने यह दिखाया था कि इस प्रमेय के प्रयोग से किस प्रकार समीकरण हल किये जा सकते हैं। अब हम विभिन्न समीकरणों के हल करने तथा ज्ञात मूलों वाले समीकरण बनाने की विधि का विस्तृत विवेचन करेंगे।

४.०२. **समीकरण मीमांसा**—समीकरणों के मूलों से संबंधित प्रमुख नियम ये हैं।

यदि nth कोटि का एक समीकरण

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_n=0\ldots \quad (1)$$

हो तो इस समीकरण के n मूल होंगे। ये वास्तविक, काल्पनिक अथवा आपस में बराबर हो सकते हैं। प्रत्येक मिश्र काल्पनिक मूल का संयुग्मी भी समीकरण का मूल होता है।

यदि n मूल $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots \alpha_n$ हों, तो

$$\sum\alpha_1=-a_1,$$

$$\sum\alpha_1\alpha_2=a_2,$$

$$\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-a_3, \text{ आदि ।}$$

यहाँ हमने मान लिया है कि x के उच्चतम घात का गुणांक इकाई है।

क्योंकि $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\alpha_n$ समीकरण (1) के मूल हैं, इसलिये हम (1) को इस प्रकार से भी लिख सकते हैं।

$$(x-\alpha_1)\ (x-\alpha_2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (x-\alpha_n)\ . \quad (2)$$

४.०३. हम मुख्यत: चार प्रकार के समीकरण हल करेंगे—

(i) $ax^n+b=0$.

यहाँ $x^n=-b/a$, तथा इस समीकरण के मूल $(-b/a)^{1/n}$ के n विभिन्न मान हैं, जो द-मायवर के प्रमेय से ज्ञात हो सकते हैं।

(ii) $ax^{2n}+bx^n+c=0$.

6

यह समीकरण x^n में वर्गात्मक है तथा यह इस प्रकार भी लिखी जा सकती है

$$(x^n - p)\ (x^n - q) = 0,$$

जिससे $$x^n = p, \text{ एवं } x^n = q\ .$$

इनमें से प्रत्येक उपरोक्त विधि से हल हो सकता है इसके $2n$ मूल होंगे।

(iii) $p\ (ax+b)^n + q\ (cx+d)^n = 0$.

इसमें $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ रखने पर, जहाँ $cx+d \neq 0$, इसका रूप निम्न होगा

$$py^n + q = 0.$$

यह भी (i) की विधि से हल हो सकता है। यदि y_r रूपान्तरित समीकरण का एक मूल है तो संयत मूल x_r निम्न से प्राप्त होगा।

$$y_r = \frac{ax_r + b}{cx_r + d}.$$

(iv) $x^{n-1} \pm x^{n-2} \pm \ldots\ldots\ldots \pm 1 = 0.$

इसे $(x \mp 1)$ से गुणा करने पर हमें निम्न समीकरण प्राप्त होता है

$$x^n \pm 1 = 0\ .$$

द-मायवर के प्रमेय से इसके n मूल ज्ञात हो सकते हैं। इनमें से $x = \pm 1$ के अतिरिक्त सभी मूल दत्त समीकरण के मूल हैं।

उदाहरण १ । $x^5 + 1 = 0$, को हल करो।

यहाँ $$x^5 = -1 = \cos\ (2r+1)\pi \pm i \sin\ (2r+1)\pi,$$
जहाँ r, एक पूर्ण संख्या है।

अतएव $$x = \cos \frac{(2r+1)\pi}{5} \pm i \sin \frac{(2r+1)\pi}{5},$$

जहाँ $r = 0, 1, 2$. अस्तु

$$\cos \frac{\pi}{5} \pm i \sin \frac{\pi}{5},\ \cos \frac{3\pi}{5} \pm i \sin \frac{3\pi}{5}, \text{ तथा } -1,$$

समीकरण के 5 मूल होंगे।

उदाहरण २ । $x^6 - x^3 + 1 = 0$, को हल करो।

इसे x^3 में वर्गात्मक समीकरण मानने पर इसका हल है

$$x^3 = \frac{1 \pm \sqrt{(1-4)}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

अत:
$$x^3 = \cos(\pi/3) \pm i \sin(\pi/3).$$

$$\therefore\ x = \cos\frac{(2r\pi + \pi/3)}{3} \pm i \sin\frac{(2r\pi + \pi/3)}{3},$$

जहाँ $r = 0, 1, 2$.

इस प्रकार हमें 6 अभीष्ट मूल प्राप्त हो जायेंगे।

उदाहरण ३। $(x+i)^6 + (x-i)^6 = 0$, को हल करो।

यहाँ $y = \dfrac{x+i}{x-i}$ रखने पर, हमें निम्न समीकरण प्राप्त होता है।

$$y^6 + 1 = 0$$

जिससे उदाहरण १ की भाँति हल करने पर

$$y = \cos\frac{(2r+1)\pi}{6} + i \sin\frac{(2r+1)\pi}{6},$$

जहाँ $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

परन्तु
$$y = \frac{x+i}{x-i}.$$

अत:
$$\frac{x}{i} = \frac{1+y}{-1+y},$$

या
$$\frac{x}{i} = \frac{1 + \cos\frac{(2r+1)\pi}{6} + i \sin\frac{(2r+1)\pi}{6}}{-1 + \cos\frac{(2r+1)\pi}{6} + i \sin\frac{(2r+1)\pi}{6}}$$

$$= \frac{2\cos^2\frac{(2r+1)\pi}{12} + 2i \sin\frac{(2r+1)\pi}{12}\cos\frac{(2r+1)\pi}{12}}{-2\sin^2\frac{(2r+1)\pi}{12} + 2i \sin\frac{(2r+1)\pi}{12}\cos\frac{(2r+1)\pi}{12}}$$

$$= \cot\frac{(2r+1)\pi}{12} \times \frac{\cos\frac{(2r+1)\pi}{12} + i\sin\frac{(2r+1)\pi}{12}}{-\sin\frac{(2r+1)\pi}{12} + i\cos\frac{(2r+1)\pi}{12}}$$

$$= \cot\frac{(2r+1)\pi}{12} \times \frac{1}{i}$$

जिससे $\quad x = \cot\frac{(2r+1)\pi}{12}$

जहाँ $\quad r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ रखने से मूल प्राप्त होंगे।

उदाहरण ४ । $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$, को हल करो।

इस समीकरण को $(x+1)$ से गुणा करने पर निम्न समीकरण प्राप्त होता है

$$x^7 + 1 = 0 .$$

द-मायवर के प्रमेय के प्रयोग से

$$x = \cos\frac{(2r+1)\pi}{7} + i\sin\frac{(2r+1)\pi}{7},$$

जहाँ $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

अतएव $x = -1$, के अतिरिक्त दत्त समीकरण के मूल उपर्युक्त हैं।

उदाहरण ५ । समीकरण $x^{12} = 1$ को हल करो और ज्ञात करो कि इसके कौन से मूल $x^4 + x^2 + 1 = 0$ को भी सन्तुष्ट करते हैं।

[इलाहाबाद, १९४४]

दत्त समीकरण है $\quad x^{12} - 1 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$

या $\quad (x^6 - 1)(x^6 + 1) = 0$

या $\quad (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)(x^6 + 1) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$

समीकरण (1) से

$$x = \cos\frac{2r\pi}{12} + i\sin\frac{2r\pi}{12}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (3)$$

जहाँ $r = 0, 1, 2, \ldots 11$ है।

अब $\quad x^6 + 1 = 0$ को हल करने पर

$$x=\cos\frac{(2r+1)\pi}{6}+i\sin\frac{(2r+1)\pi}{6} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

जहाँ $r=0, 1, 2, \ldots 5$ है।

समीकरण (2) से स्पष्ट है कि समीकरण (1) के बारह मूलों में से चार मूल समीकरण $x^4+x^2+1=0$ के भी मूल हैं।

इन चार मूलों को प्राप्त करने के लिए हम (3) से प्राप्त 12 मूलों में $1, -1$ तथा (4) से प्राप्त 6 मूल छोड़ देते हैं। (3) से हमें $-1, 1$, तथा (4) के 6 मूल क्रमशः $r=0,6,1,3,5,7,9,11$ रखने पर प्राप्त होते हैं। अतएव

$$x^4+x^2+1=0$$

के अभीष्ट मूल

$$x=\cos\frac{2r\pi}{12}+i\sin\frac{2r\pi}{12},$$

में $r=2,4,8,10$, रख कर प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण ६। समीकरण $x^7+1=0$ को हल करो, तथा सिद्ध करो कि

(i) $$(x^7+1)=(x+1)\prod_{r=0}^{2}\left\{x^2-2x\cos\frac{(2r+1)\pi}{7}+1\right\},$$

(ii) $$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=4\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}$$

$$=\tfrac{1}{2}.$$

समीकरण $x^7+1=0$ को हल करने पर ७ मूल मिलेंगे जिससे

$$x=\cos\frac{(2r+1)\pi}{7}\pm i\sin\frac{(2r+1)\pi}{7}, \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

जहाँ $r=0,1,2,3,$ है।

(i) (x^7+1) का एक गुणनखंड $(x+1)$ है जो (1) में $r=3$ रखने पर प्राप्त होता है। शेष 6 गुणनखंड $r=0,1,2$ रखने पर प्राप्त होंगे। अतएव

$$x^7+1=(x+1)\prod_{r=0}^{2}\left\{x-\cos\frac{(2r+1)\pi}{7}\mp i\sin\frac{(2r+1)\pi}{7}\right\},$$

जहाँ चिह्न Π

$$\left\{x-\cos\frac{(2r+1)\pi}{7}\mp i\sin\frac{(2r+1)\pi}{7}\right\}$$

की प्रकार के व्यंजकों के गुणनफल का सूचक है। अब संयुग्मी व्यंजकों का गुणनफल है

$$\left\{x-\cos\frac{(2r+1)\pi}{7}+i\sin\frac{(2r+1)\pi}{7}\right\}\times$$

$$\left\{x-\cos\frac{(2r+1)\pi}{7}-i\sin\frac{(2r+1)\pi}{7}\right\}$$

$$=\left\{x-\cos\frac{(2r+1)\pi}{7}\right\}^2+\left\{\sin\frac{(2r+1)\pi}{7}\right\}^2$$

$$=x^2-2x\cos\frac{(2r+1)\pi}{7}+1.$$

अतः $$x^7+1=(x+1)\prod_{r=0}^{2}\left\{x^2-2x\cos\frac{(2r+1)\pi}{7}+1\right\}. \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

(ii) परिणाम (2) के दोनों पक्षों में हम x^6 के गुणांक बराबर करेंगे। प्रत्यक्षतः बाम पक्ष में x^6 का गुणांक 0 है, और दाहिना पक्ष जो

$$(x+1)\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{7}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{3\pi}{7}+1\right)$$

$$\left(x^2-2x\cos\frac{5\pi}{7}+1\right)$$

है उसमें x^6 का गुणांक है

$$1-2\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\right)$$

अब गुणांकों को बराबर करने पर

$$0=1-2\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\right).$$

अतः $$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\tfrac{1}{2}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

पुन (2) में $x=1$ रखने पर

$$2=2\left(1-2\cos\frac{\pi}{7}+1\right)\left(1-2\cos\frac{3\pi}{7}+1\right)\left(1-2\cos\frac{5\pi}{7}+1\right),$$

जिससे $$1=8\left(1-\cos\frac{\pi}{7}\right)\left(1-\cos\frac{3\pi}{7}\right)\left(1-\cos\frac{5\pi}{7}\right),$$

$$=8.8\sin^2\frac{\pi}{14}\sin^2\frac{3\pi}{14}\sin^2\frac{5\pi}{14}.$$

अतएव वर्गमूल लेने पर

$$4\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}=\tfrac{1}{2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

अतएव (3) तथा (4) से

$$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=4\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}=\tfrac{1}{2}.$$

उदाहरण ७। $\tan 5\theta$ का $\tan\theta$ के फलन के रूप में विस्तार करो, तथा उससे समीकरण

$$x^4-10x^2+5=0$$

को हल करो, तथा दिखाओ कि

$$\tan^2\frac{\pi}{5}+\tan^2\frac{2\pi}{5}=10.$$

हमें § ३.०७ से विदित है कि

$$\tan 5\theta=\frac{5\tan\theta-10\tan^3\theta+\tan^5\theta}{1-10\tan^2\theta+5\tan^4\theta}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

अब हम समीकरण

$$\tan 5\theta=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

को हल करेंगे। इसके मूल, $\theta=\pm\frac{r\pi}{5}$, हैं .... (3)

जहाँ $r=0,1,2$.

पुनः जब $\tan 5\theta=0$, तब (1) से

$$5 \tan \theta-10 \tan^3\theta+\tan^5\theta=0,$$

जिससे या तो $\tan\theta=0$, अर्थात् $\theta=0$,

अथवा $$\tan^4\theta-10 \tan^2\theta+5=0. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

इसमें $\tan\theta=x$ रखने पर

$$x^4-10x^2+5=0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

जो दत्त समीकरण है ।

अतएव (5) के हल हैं

$$x = \tan\left(\pm\frac{r\pi}{5}\right)=\pm \tan\frac{r\pi}{5},$$

जहाँ $r = 1,2$.

अब (5) को हम x^2 में वर्गात्मक मान सकते हैं, जिसमें द्वितीय पद का गुणांक 10 है। अतः इस वर्गात्मक समीकरण के मूलों का योग 10 है, अथवा

$$\tan^2\frac{\pi}{5}+\tan^2\frac{2\pi}{5} = 0 .$$

४.०४. मूल ज्ञात होने पर समीकरण बनाना—हम §४.०२ में किसी समीकरण के मूलों के विभिन्न सममित फलनों तथा समीकरण के गुणांकों के संबंध का उल्लेख कर चुके हैं। उनकी सहायता से ज्ञात मूलों वाले समीकरण बनाये जा सकते हैं। निम्न उदाहरणों में ज्ञात मूल वाले समीकरण बनाने की विविध रीतियाँ दी गई हैं।

उदाहरण १। वह समीकरण बनाओ जिसके मूल

$\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$, $\cos\frac{6\pi}{7}$ हैं [इलाहाबाद, १९४६]

दत्त कोणों में से किसी एक को θ मानने पर 7θ कोण 2π का एक सम अपवर्त्य हो जायगा, अथवा $7\theta = 2n\pi$,

जिससे $$4\theta = 2n\pi - 3\theta.$$

अतः $$\cos 4\theta=\cos(2n\pi-3\theta) =\cos 3\theta$$

या $$2\cos^2 2\theta-1 = 4\cos^3\theta-3\cos\theta . \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

अब $\cos\theta = x$ रखने पर (1) का रूप निम्न होगा

$$2(2x^2-1)^2 - 1 = 4x^3-3x,$$

या $$8x^4-8x^2+2-1 = 4x^3-3x,$$

या $$8x^4-4x^3-8x^2+3x+1 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

इस समीकरण के मूल हैं—

$\cos 0, \cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{6\pi}{7}.$

अब $$8x^4-4x^3-8x^2+3x+1$$
$$= (x-1)(8x^3+4x^2-4x-1).$$

अतः $\cos\frac{2\pi}{7}, \cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{6\pi}{7}$, निम्न समीकरण

$8x^3+4x^2-4x-1 = 0$ के मूल होंगे।

उदाहरण २। सिद्ध करो कि समीकरण

$$8x^3-4x^2-4x+1 = 0.$$

के मूल $\cos\frac{\pi}{7}, \cos\frac{3\pi}{7}, \cos\frac{5\pi}{7}$ हैं।

यह भी सिद्ध करो कि

(i) $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2},$

(ii) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}+$
$\cos\frac{5\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} = -\frac{1}{2},$

तथा (iii) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = -\frac{1}{8}.$

उदाहरण १ में दी हुई विधि से यह प्रश्न किया जा सकता है जब कि दिये हुए कोणों में से किसी एक को θ मान लें।

अब हम इसे दूसरी विधि से हल करेंगे।

मान लें $y = \cos\theta + i \sin \theta$ .... (1)

जहाँ θ का मान $\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \frac{7\pi}{7}, \frac{9\pi}{7}, \frac{11\pi}{7}, \frac{13\pi}{7}$ में से एक है

तब $y^7 = \cos 7\theta + i \sin 7\theta = -1,$

अर्थात् $y^7 + 1 = 0,$

या $(y+1)(y^6 - y^5 + y^4 - y^3 + y^2 - y + 1) = 0$

मूल $y = -1$, उस समय प्राप्त होता है जब $\theta = \pi$.

अतएव समीकरण

$$y^6 - y^5 + y^4 - y^3 + y^2 - y + 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

के मूल हैं $\cos \theta + i \sin \theta,$

जहां $\theta = \frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \frac{9\pi}{7}, \frac{11\pi}{7}, \frac{13\pi}{7}$ है।

समीकरण (2) को y^3 से भाग देकर इस प्रकार भी लिख सकते हैं

$$y^3 - y^2 + y - 1 + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} = 0$$

या $$\left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) - \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) - 1 = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

अब समीकरण (1) से

$$y + \frac{1}{y} = 2 \cos\theta = 2x \text{ मान लें},$$

जिससे $\cos \theta = x$.

इसी प्रकार $\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) = \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 - 2 = 4x^2 - 2,$

तथा $$\left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) = \left(y + \frac{1}{y}\right)^3 - 3\left(y + \frac{1}{y}\right) \cdot y \cdot \frac{1}{y},$$

$$= \left(y + \frac{1}{y}\right)\left[\left(y + \frac{1}{y}\right)^2 - 3\right],$$

$$= 8x^3 - 6x .$$

उपरोक्त व्यंजकों की स्थानापत्ति से (3) का रूप निम्म होगा

$$8\ x^3 - 6x - 4x^2 + 2 + 2x - 1 = 0,$$

या $$8\ x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0 . \quad \dots\dots\dots\dots (4)$$

क्योंकि $\cos\frac{13\pi}{7} = \cos\frac{\pi}{7}$; $\cos\frac{11\pi}{7} = \cos\frac{3\pi}{7}$, और

$$\cos\frac{9\pi}{7} = \cos\frac{5\pi}{7}$$

अतः समीकरण (4) के मूल $\cos\frac{\pi}{7}$, $\cos\frac{3\pi}{7}$, $\cos\frac{5\pi}{7}$ हैं

इससे हमें निम्न फल भी प्राप्त हैं

$$\text{(i)}\ \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = -\left(-\frac{4}{8}\right) = \tfrac{1}{2},$$

$$\text{(ii)}\ \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}$$

$$\cos\frac{\pi}{7} = +\left(-\frac{4}{8}\right) = -\tfrac{1}{2},$$

तथा $$\text{(iii)}\ \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = -\left(\frac{1}{8}\right) = -\tfrac{1}{8}.$$

उदाहरण ३। वह कौन सा समीकरण है जिसके मूल

$$\tan^2\frac{\pi}{7},\ \tan^2\frac{2\pi}{7},\ \tan^2\frac{3\pi}{7}\ \text{हैं ?}$$

हमें विदित है कि

$$\tan^2\frac{\pi}{7} = \frac{\sin^2\pi/7}{\cos^2\pi/7} = \frac{1 - \cos\frac{2\pi}{7}}{1 + \cos\frac{2\pi}{7}}$$

$$= \frac{1-x}{1+x}, \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

जहाँ $x=\cos\frac{2\pi}{7}$.

उदाहरण १ से हमें ज्ञात है कि

$$8x^3+4x^2-4x-1=0 \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

के मूल $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$, $\cos\frac{6\pi}{7}$ हैं

अतः (1) के कारण, हमें अभीष्ट समीकरण प्राप्त करने के लिए (2) में

$$y=\frac{1-x}{1+x},$$

अर्थात्

$$x=\frac{1-y}{1+y},$$

रखना पड़ेगा। इस प्रकार अभीष्ट समीकरण निम्न होगा--

$$8\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^3+4\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2-4\left(\frac{1-y}{1+y}\right)-1=0,$$

या

$$8(1-y)^3+4(1-y)^2(1+y)-4(1-y)(1+y)^2-(1+y)^3=0,$$

या

$$y^3-21y^2+35y-7=0 . \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

उदाहरण ४ । सिद्ध करो कि

(i) $\sec\frac{2\pi}{7}+\sec\frac{4\pi}{7}+\sec\frac{6\pi}{7}=-4,$

(ii) $\sec^2\frac{2\pi}{7}+\sec^2\frac{4\pi}{7}+\sec^2\frac{6\pi}{7}=24,$

(iii) $\sec^2\frac{2\pi}{7}\cdot\sec^2\frac{4\pi}{7}\cdot\sec^2\frac{6\pi}{7}=64.$

उदाहरण १ में हल किये हुए समीकरण

$$8x^3+4x^2-4x-1=0 \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

के मूल $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$, $\cos\frac{6\pi}{7}$, हैं ...... (2)

(i) क्योंकि $\sec\frac{2\pi}{7}$, $\sec\frac{4\pi}{7}$, $\sec\frac{6\pi}{7}$ क्रमशः (2) में दिये गये मूलों के व्युत्क्रम हैं, अतएव वे निम्न समीकरण

$$8\left(\frac{1}{y}\right)^3+4\left(\frac{1}{y}\right)^2-4\left(\frac{1}{y}\right)-1=0$$

या
$$y^3+4y^2-4y-8=0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

के मूल होंगे जो (1) में $x=\frac{1}{y}$ रखने पर प्राप्त होता है।

अतः $$\sec\frac{2\pi}{7}+\sec\frac{4\pi}{7}+\sec\frac{6\pi}{7}=-4 \qquad \ldots\ldots (4)$$

दो फल और भी प्राप्त होगे जो निम्न हैं—

$$\sec\frac{2\pi}{7}\sec\frac{4\pi}{7}+\sec\frac{4\pi}{7}\sec\frac{6\pi}{7}+\sec\frac{6\pi}{7}\sec\frac{2\pi}{7}$$

$$=-4 \qquad \ldots. (5)$$

तथा $$\sec\frac{2\pi}{7}\cdot\sec\frac{4\pi}{7}\cdot\sec\frac{6\pi}{7}=8 \qquad \ldots. (6)$$

(ii) $$\sec^2\frac{2\pi}{7}+\sec^2\frac{4\pi}{7}+\sec^2\frac{6\pi}{7}$$

$$=\left\{\sec\frac{2\pi}{7}+\sec\frac{4\pi}{7}+\sec\frac{6\pi}{7}\right\}^2-2\sum\left(\sec\frac{2\pi}{7}\sec\frac{4\pi}{7}\right),$$

$$=16-2(-4)$$
$$=24.$$

(iii) समीकरण (6) से

$$\sec\frac{2\pi}{7}\sec\frac{4\pi}{7}\sec\frac{6\pi}{7}=8$$

अतः $$\sec^2\frac{2\pi}{7}\sec^2\frac{4\pi}{7}\sec^2\frac{6\pi}{7}=64.$$

उदाहरण ५। सिद्ध करो कि

$$\cos 6\theta=32\cos^6\theta-48\cos^4\theta+18\cos^2\theta-1$$

तथा इससे दिखाओ कि समीकरण

$$32x^3+48x^2+18x+1=0$$

के मूल $-\cos^2\dfrac{\pi}{12}$, $-\cos^2\dfrac{\pi}{4}$, $-\cos^2\dfrac{5\pi}{12}$ है.

द-मायवर के प्रमेय से

$$\cos 6\theta+i\sin 6\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^6 .$$

इसमें दाहिने पक्ष का द्विपद प्रमेय से प्रसार करके, और दोनों ओर की वास्तविक राशियों को बराबर करने पर हमें प्राप्त होगा

$$\cos 6\theta=32\cos^6\theta-48\cos^4\theta+18\cos^2\theta-1 .$$

अब समीकरण $\cos 6\theta=0$,

अथवा $$32\cos^6\theta-48\cos^4\theta+18\cos^2\theta-1=0 \quad \ldots\ldots (1)$$

के मूल हैं $$6\theta=\frac{(2r+1)\pi}{2},$$

अथवा $$\theta=\frac{(2r+1)\pi}{12}, \quad \ldots\ldots (2)$$

जहाँ r एक पूर्ण संख्या है।

समीकरण (1) में $\cos^2\theta=-x$ रखने पर

$$-32x^3-48x^2-18x-1=0,$$

अथवा $$32x^3+48x^2+18x+1=0, \quad \ldots\ldots (3)$$

जो हमें हल करना है।

स्पष्टतय: इसके मूल हैं

$$x=-\cos^2\theta,$$

जहाँ θ, (2) से प्राप्त प्रथम तीन मान के बराबर है, जो $r=0,1,2$ रखने से प्राप्त होते हैं। अस्तु दत्त समीकरण (3) के मूल हैं

$$-\cos^2\frac{\pi}{12}\,,\ -\cos^2\frac{\pi}{4}\,,\ -\cos^2\frac{5\pi}{12}\,.$$

अध्याय ४ पर उदहरण

1. द-मायवर के प्रमेय की सहायता से समीकरण $x^5-1=0$ को हल करो, तथा दिखाओ कि समीकरण के मूलों के nth घातों का योग शून्य है, जबकि n एक पूर्ण संख्या है जो 5 से भाजित नहीं है।

(उत्तरप्रदेश सिविल सर्विस, १९४९)

२. सिद्ध करो कि समीकरण

$$x^{16}-47x^8+1=0$$

के मूल हैं

$$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\left(\cos\frac{r\pi}{4}\pm i\sin\frac{r\pi}{4}\right).$$

3. हल करो

$$x^5-5x^4-10x^3+10x^2+5x-1=0\,.$$

4. हल करो

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0\,.$$

इससे या अन्य विधि से दिखाओ कि

$$\cos\frac{2\pi}{7},\ \cos\frac{4\pi}{7},\ \cos\frac{8\pi}{7}$$

समीकरण $8x^3+4x^2-4x-1=0$ के मूल हैं।

[इलाहाबाद, १९४६]

5. सिद्ध करो कि समीकरण

$$x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1=0$$

के मूल $\cos\frac{(2r+1)\pi}{13}$, हैं, जहाँ $r=0,1,2,3,4,5$.

6. हल करो

$$x^5-10x^3+20x+8=0\ .$$

7. यदि समीकरण

$$x^6-x^5-6x^4+6x^3+8x^2-8x+1=0$$

का एक मूल $2\cos\dfrac{2\pi}{21}$ हो, तो दिखाओ कि समीकरण के अन्य मूल हैं

$$2\cos\frac{4\pi}{21}\ ,\ 2\cos\frac{8\pi}{21}\ ,\ 2\cos\frac{16\pi}{21}\ ,\ 2\cos\frac{10\pi}{21}\ ,\ 2\cos\frac{20\pi}{21}\ .$$

8. समीकरण $(x+1)^5+(x-1)^5=0$ के मूल ज्ञात करो।

9. यदि एक समीकरण के मूल

$$\cos\frac{\pi}{7}\ ,\ \cos\frac{3\pi}{7}\ \text{तथा}\ \cos\frac{5\pi}{7}$$

हैं तो सिद्ध करो कि वह समीकरण निम्न है

$$8\ x^3-4x^2-4x+1=0\ .$$

10. दिखाओ कि

$$\cos\frac{2\pi}{9}\ ,\ \cos\frac{4\pi}{9}\ \text{एवं}\ \cos\frac{8\pi}{9}$$

निम्न समीकरण के मूल हैं

$$8\ x^3-6x+1=0\ .$$

11. सिद्ध करो कि

$$\tan^2\frac{\pi}{14}\ ,\ \tan^2\frac{3\pi}{14}\ \text{तथा}\ \tan^2\frac{5\pi}{14}$$

समीकरण $7x^3-35x^2+21x-1=0$ के मूल हैं।

12. वह समीकरण ज्ञात करो जिसके मूल निम्न हैं

$$\tan^2\frac{\pi}{11}\ ,\ \tan^2\frac{2\pi}{11}\ ,\ \tan^2\frac{3\pi}{11}\ ,\ \tan^2\frac{4\pi}{11}\ ,\ \tan^2\frac{5\pi}{11}\ .$$

सिद्ध करो कि

13. $$\tan^2\frac{\pi}{9}+\tan^2\frac{2\pi}{9}+\tan^2\frac{4\pi}{9}=33\ .$$

14. $\tan^2\frac{\pi}{11}+\tan^2\frac{2\pi}{11}+\tan^2\frac{3\pi}{11}+\tan^2\frac{4\pi}{11}+$

$$\tan^2\frac{5\pi}{11}=55 .$$

15. निम्न का मान निकालो

$$\cot^2\frac{\pi}{9}+\cot^2\frac{2\pi}{9}+\cot^2\frac{4\pi}{9}.$$

16. दिखाओ कि

$$\sec^2\frac{\pi}{11}+\sec^2\frac{2\pi}{11}+\sec^2\frac{3\pi}{11}+\sec^2\frac{4\pi}{11}$$

$$+\sec^2\frac{5\pi}{11}=60.$$

17. $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ के वास्तविक गुणनखंड ज्ञात करो।

18. सिद्ध करो कि

$$(x^8+1)=\prod_{r=0}^{3}\left\{x^2-2x\cos(2r+1)\frac{\pi}{8}+1\right\}.$$

19. $(x^{16}+1)$ के वास्तविक वर्गात्मक गुणनखंड ज्ञात करो, तथा सिद्ध करो कि

$$\sin\frac{\pi}{32}\cdot\sin\frac{3\pi}{32}\cdot\sin\frac{5\pi}{32}\cdot\;\dots\dots\;\sin\frac{15\pi}{32}=\frac{\sqrt{2}}{2^8}.$$

२०. सिद्ध करो कि

$$\frac{\cos 7\theta}{\cos\theta}=1-2(2\cos 2\theta)-(2\cos 2\theta)^2+(2\cos 2\theta)^3,$$

तथा इससे समीकरण $x^3-x^2-2x+1=0$ को हल करो।

21. दिखाओ कि

$$\frac{\cos 7\theta}{\cos\theta}=1-24\sin^2\theta+80\sin^4\theta-64\sin^6\theta,$$

एवं इससे सिद्ध करो कि

(i) $\sin^2 \frac{\pi}{14} + \sin^2 \frac{3\pi}{14} + \sin^2 \frac{5\pi}{14} = 5/4,$

(ii) $\cot^2 \frac{\pi}{14} + \cot^2 \frac{3\pi}{14} + \cot^2 \frac{5\pi}{14} = 21$.

22. सिद्ध करो कि

$$\frac{\sin 7\theta}{\sin\theta} = 64 \left(\cos^2\theta - \cos^2 \frac{\pi}{7}\right) \times \left(\cos^2\theta - \cos^2 \frac{2\pi}{7}\right) \times \left(\cos^2\theta - \cos^2 \frac{3\pi}{7}\right).$$

इससे दिखाओ कि

$$\cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{2\pi}{7} + \cos^2 \frac{3\pi}{7} = \frac{5}{4}.$$

23. हल करो $x^{12} - x^6 + 1 = 0$.

24. समीकरण $x^{10} = 1$ के कौन से मूल, समीकरण

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

को संतुष्ट करते है ?

25. सिद्ध करो $\cot \frac{\pi}{7}$, $\cot \frac{2\pi}{7}$ तथा $\cot \frac{4\pi}{7}$ समीकरण

$$\sqrt{7}x^3 - 7x^2 + \sqrt{7}x + 1 = 0,$$

के मूल हैं ।

26. समीकरण ज्ञात करो जिसके मूल $\cos\alpha$. $\cos(\alpha + \frac{2}{3}\pi)$, $\cos(\alpha + \frac{4}{3}\pi)$ है तथा

$$\sec^2\alpha + \sec^2(\alpha + \tfrac{2}{3}\pi) + \sec^2(\alpha + \tfrac{4}{3}\pi)$$

का मान ज्ञात करो ।

27. यदि x_1, x_2, x_3, x_4 समीकरण

$$x^4 - x^3 \sin 2\alpha + x^2 \cos 2\alpha - x \cos\alpha - \sin\alpha = 0$$

के मूल हो तो सिद्ध करो कि

$$\Sigma \tan^{-1} x_1 = n\pi + \tfrac{1}{2}\pi - \alpha .$$

अध्याय ५

मिश्र काल्पनिक राशियों के त्रिकोणमितीय एवं घातीय फलन

५.०१ परिभाषा — यदि x एक वास्तविक राशि हो, तो हमें विदित है कि

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots \text{ अनन्त तक ।} \quad \ldots\ldots (1)$$

यह सूत्र केवल तभी सार्थक है जब x वास्तविक है। यदि x एक मिश्र काल्पनिक राशि $(a+ib)$ हो, तो (1) निर्थक है।

हम e^z की परिभाषा, जहा $z = a + ib$, इस प्रकार देते हैं

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots (2)$$

यह परिणाम (1) के तुल्य है। अब हम सिद्ध करेंगे कि श्रेणी (2) अभिसारी है।

मान लें $\qquad z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

जहाँ $\theta \neq 0$, तब यदि $\cos\theta + i\sin\theta$ को $(\text{cis}\theta)$ लिखें तो

$$e^z = 1 + r(\text{cis}\theta) + \frac{r^2}{2!}(\text{cis}\theta)^2 + \frac{r^3}{3!}(\text{cis}\theta)^3 + \ldots\ldots$$

$$= 1 + r(\text{cis}\theta) + \frac{r^2}{2!}(\text{cis}\,2\theta) + \frac{r^3}{3!}(\text{cis}\,3\theta) + \ldots\ldots$$

$$= 1 + r\cos\theta + \frac{r^2}{2!}\cos 2\theta + \frac{r^3}{3!}\cos 3\theta + \ldots\ldots$$

$$+ i\left(r\sin\theta + \frac{r^2}{2!}\sin 2\theta + \frac{r^3}{3!}\sin 3\theta + \ldots\ldots\right)$$

अब, क्योंकि $\cos\theta < 1$, इसलिये

$$1 + r\cos\theta + \frac{r^2}{2!}\cos 2\theta + \ldots\ldots$$

$$< 1 + r + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots$$

अतएव $$1+r\cos\theta+\frac{r^2}{2!}\cos 2\theta+\ldots\ldots$$ अभिसारी है,

क्योंकि $$1+r+\frac{r^2}{2!}+\ldots\ldots\ldots$$ अभिसारी है।

इसी प्रकार श्रेणी

$$r\sin\theta+\frac{r^2}{2!}\sin 2\theta+\frac{r^3}{3!}\sin 3\theta+\ldots\ldots\ldots$$

भी अभिसारी है।

वास्तव में ये श्रेणियाँ परम अभिसारी हैं क्योंकि

$$|\cos n\theta|\leqslant 1$$

तथा $$|\sin n\theta|\leqslant 1$$

जहाँ n एक पूर्ण संख्या है।

अतएव e^z की श्रेणी भी z के समस्त मानों के लिये परम अभिसारी है।

यह स्मरण रखना चाहिये कि जब z एक मिश्र काल्पनिक राशि है तब e^z केवल श्रेणी

$$1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots\ldots\ldots$$

की परिभाषा, अथवा उसे सूचित करने की संकेत लिपि है।

५.०२ e^z की उपर्युक्त परिभाषा से सिद्ध करना कि $e^{z_1}\times e^{z_1}=e^{z_1+z_2}$.

हमें विदित है कि

$$e^{z_1}=1+z_1+\frac{z_1^2}{2!}+\frac{z_1^3}{3!}+\ldots+\frac{z_1^n}{n!}+\ldots,\quad\ldots\ (1)$$

$$e^{z_2}=1+z_2+\frac{z_2^2}{2!}+\ldots+\frac{z_2^n}{n!}+\ldots\ldots\quad\ldots\ (2)$$

अतः (1) और (2) के गुणन से

$$e^{z_1}\times e^{z_2}=\left(1+z_1+\frac{z_1^2}{2!}+\ldots+\frac{z_1^n}{n!}+\ldots\right)$$
$$\left(1+z_2+\frac{z_2^2}{2!}+\ldots+\frac{z_2^n}{n!}+\ldots\right)$$

$$=1+(z_1+z_2)+\left(\frac{z_1^2}{2!}+z_1z_2+\frac{z_2^2}{2!}\right)+\ldots.$$

$$+\left(\frac{z_1^n}{n!}+\frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{z_2}{1}+\frac{z_1^{n-2}}{(n-2)!}\cdot\frac{z_2^2}{2!}+\ldots+\frac{z_2^n}{n!}\right)$$

$$+\ldots\ldots\ldots$$

$$=1+(z_1+z_2)+\frac{1}{2!}(z_1^2+2z_1z_2+z_2^2)+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{n!}\left\{z_1^n+nz_1^{n-1}z_2+\frac{n(n-1)}{1.2}z_1^{n-2}.z_2^2+\ldots.+z_2^n\right\}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$=1+(z_1+z_2)+\frac{(z_1+z_2)^2}{2!}+\ldots.+\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}+\ldots\ldots$$

$$=e^{z_1+z_2}, \text{ परिभाषा से ।} \qquad \ldots\ldots. (3)$$

इसी प्रकार $e^{z_1}\times e^{z_2}\times e^{z_3}\times\ldots.=e^{z_1+z_2+z_3+\ldots.}$.

यहाँ हमने श्रेणी (1) तथा (2) को एक दूसरे से गुणा किया है। अनन्त श्रेणियों का गुणन तभी किया जा सकता है जब उनमें से प्रत्येक परम अभिसारी हो। हम इन दोनों श्रेणियों को पहले ही परम अभिसारी सिद्ध कर चुके हैं।

५.०३ मिश्र काल्पनिक राशियों के वृत्तुल फलन—हम वास्तविक x के लिये $\sin x$, $\cos x$ के विस्तार प्राप्त कर चुके हैं। जब z एक मिश्र काल्पनिक राशि है, तो हम $\sin z$ या $\cos z$ की परिभाषा पहले की भांति समान रूप वाली निम्न श्रेणियों से देते हैं

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\ldots\ldots, \qquad (1)$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

ये दोनों श्रेणियाँ भी अभिसारी सिद्ध की जा सकती हैं।

एक मिश्र काल्पनिक राशि के अन्य वृत्तुल फलनों की भी परिभाषा उसी प्रकार देते हैं जैसे एक वास्तविक राशि के फलनों की। अस्तु

$$\tan z = \sin z/\cos z, \cot z = \cos z/\sin z,$$

$$\sec z = 1/\cos z, \operatorname{cosec} z = 1/\sin z.$$

५.०४ ऑयलर का प्रमेय— $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

§ ५.०३ से हमें प्राप्त है

$$(\cos\theta + i\sin\theta) = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\right)$$

$$= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \ldots\ldots$$

$$= e^{i\theta}.$$

अतएव $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

इसी प्रकार $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

इनसे

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2},$$

तथा $$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

$\cos\theta$ तथा $\sin\theta$ के ये मान उनके घातीय मान कहलाते हैं।

५.०५ अतिपरवलयिक फलन—अब यदि हम $\cos\theta$ तथा $\sin\theta$ के लिये प्राप्त घातीय व्यंजकों में θ को एक पूर्णतय: काल्पनिक राशि, $i\phi$ मान लें, जहाँ ϕ वास्तविक है, तब

$$\cos i\phi = \frac{e^{i(i\phi)} + e^{-i(i\phi)}}{2} = \frac{e^{\phi} + e^{-\phi}}{2} \quad \ldots. (1)$$

तथा $$\sin i\phi = \frac{e^{i(i\phi)} - e^{-i(i\phi)}}{2i} = -\frac{e^{\phi} - e^{-\phi}}{2i}$$

$$=i\frac{e^{\phi} - e^{-\phi}}{2}$$

अथवा $\frac{\sin i\phi}{i} = \frac{e^{\phi} - e^{-\phi}}{2}$ .... (2)

व्यंजक (1) तथा (2) को हम क्रमश: अतिपरवलयिक cos ϕ तथा अतिपरवलयिक sin ϕ की परिभाषा मानते हैं और उन्हें $\cosh \phi$ तथा $\sinh \phi$ से प्रकट करते हैं। इस प्रकार

$$\cosh \phi = \tfrac{1}{2}\left(e^{\phi} + e^{-\phi} \right) = \cos i\phi,$$

$$\sinh \phi = \tfrac{1}{2}\left(e^{\phi} - e^{-\phi} \right) = \frac{\sin i\phi}{i}.$$

इससे स्पष्ट है कि जब ϕ वास्तविक है, तब $\cosh \phi$ एवं $\sinh \phi$ पूर्णतय: वास्तविक हैं। अतिपरवलयिक फलनों का विस्तृत विवेचन आगामी अध्याय में करेंगे।

५.०६ ऑयलर का प्रमेय अत्यन्त महत्वपूर्ण है तथा आगामी विवेचन में हम बहुधा इसका प्रयोग करेंगे। इसकी सहायता से हम किसी भी मिश्र काल्पनिक राशि को मापांक तथा कोणांक के रूप में लिखकर e के घात के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। उदाहरणार्थ,

यदि $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$,

तो $z = re^{i\theta}$.

ऑयलर के सूत्र में θ को विशेष मान देने पर कुछ परिणाम प्राप्त होते हैं जो निम्न हैं—

(i) $e^{i\pi/2} = \cos \pi/2 + i \sin \pi/2 = i$,

(ii) $e^{-i\pi/2} = \cos \pi/2 - i \sin \pi/2 = -i$,

(iii) $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$,

(iv) $e^{2in\pi} = \cos 2n\pi + i \sin 2n\pi = 1$.

ऑयलर के प्रमेय से हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

क्योंकि $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$

तथा $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

अतः $e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = e^0 = 1.$$

५.०७ वृत्तुल फलनों के योग तथा व्यवकलन के नियम--

सिद्ध करना है कि

(i) $\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi,$

(ii) $\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi,$

(iii) $\sin(\theta-\phi) = \sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi,$

तथा (iv) $\cos(\theta-\phi) = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi,$

जहाँ θ तथा ϕ वास्तविक अथवा काल्पनिक हैं।

हमें विदित है कि

$$e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta} \times e^{i\phi}, \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

तथा $e^{-i(\theta+\phi)} = e^{-i\theta} \times e^{-i\phi}. \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$

अब (1) और (२) में ऑयलर के प्रमेय के प्रयोग से

$$\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi) = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi)$$

$$= (\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + i(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

तथा $\cos(\theta+\phi) - i\sin(\theta+\phi) = (\cos\theta - i\sin\theta)(\cos\phi - i\sin\phi)$

$$= (\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) - i(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi), \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

अब (3) तथा (4) को जोड़ने से तथा घटाने से

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi,$$

एवं $\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi.$

पुनः $e^{i(\theta-\phi)} = e^{i\theta} \times e^{-i\phi},$

तथा $e^{-i(\theta-\phi)} = e^{-i\theta} \times e^{i\phi}.$

अब ऑयलर के प्रमेय के प्रयोग से

$$\cos(\theta-\phi)+i\sin(\theta-\phi)=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\phi-i\sin\phi)$$
$$= \cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi)+i(\sin\theta\cos\phi-\cos\theta\sin\phi) \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

तथा $\cos(\theta-\phi)-i\sin(\theta-\phi)= (\cos\theta-i\sin\theta)(\cos\phi+i\sin\phi)$

$$= (\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi) -i(\sin\theta\cos\phi-\cos\theta\sin\phi) \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

अब (5 और (6) को जोड़ने से तथा घटाने से

$$\cos(\theta-\phi) = \cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi$$

एवं $\sin(\theta-\phi) = \sin\theta\cos\phi-\cos\theta\sin\phi.$

५.०८ अन्य परिणाम--उपर्युक्त परिणामों से स्पष्ट है कि एक वास्तविक कोण के लिये योग तथा व्यवकलन के समस्त नियम एक मिश्र काल्पनिक राशि के लिये भी लागू हैं। अतएव वास्तविक कोण के लिये वे सभी त्रिकोणमितीय परिणाम जो योग तथा व्यवकलन पर आश्रित हैं मिश्र काल्पनिक राशि के संबंध में भी सार्थक हैं। जैसे

$$\sin 2z = 2\sin z\cos z,$$
$$\cos 2z = \cos^2 z-\sin^2 z,$$
$$\sin 3z = 3\sin z-4\sin^3 z,$$
$$\cos 3z = 4\cos^3 z-3\cos z,$$

$$\tan(z_1\pm z_2)=\frac{\tan z_1\pm\tan z_2}{1\mp\tan z_1\tan z_2},$$

आदि, जहाँ $z=a+ib$, $z_1=a_1+ib_1$, $z_2=a_2+ib_2$ है।

५.०९ मिश्र काल्पनिक वृत्तुल फलनों के आवर्तक—हमें विदित है कि $\cos x$ $\sin x$ आवर्त फलन हैं, जहाँ x एक वास्तविक कोण है। ये फलन प्रत्येक 2π के पश्चात् अपने पूर्व मान प्राप्त कर लेते हैं। जैसे

$$\sin(2n\pi + x) = \sin x, \ \cos(2n\pi + x) = \cos x,$$

जहाँ n एक धनात्मक पूर्ण संख्या है।

मिश्र काल्पनिक राशियों के sines तथा cosines भी आवर्त फलन हैं जिनका आवर्तक 2π है, क्योंकि

$$\sin(\theta + \phi) = \sin\theta \cos\phi + \cos\theta \sin\phi,$$

जिसमें $\phi = 2\pi$ रखने पर

$$\sin(2\pi + \theta) = \sin\theta,$$

तथा $\sin(4\pi + \theta) = \sin\theta$, आदि।

एवं $\sin(\theta + 2r\pi) = \sin\theta$,

जहाँ r, एक, धनात्मक पूर्ण संख्या है।

पुनः $\cos(\theta + \phi) = \cos\theta \cos\phi - \sin\theta \sin\phi$,

जिसमें $\phi = 2\pi$ रखने पर

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta,$$

अथवा $\cos(\theta + 2r\pi) = \cos\theta$,

जहाँ r, एक धनात्मक पूर्ण संख्या है।

५.१० मिश्र काल्पनिक राशि के घातीय फलन का आवर्तक—

हम जानते हैं कि जब x वास्तविक है तो x का घातीय फलन e^x आवर्त नहीं होता, अर्थात् यह x में किसी निश्चित राशि को जोड़ने से पुनः अपना पूर्व मान प्राप्त नहीं करता। परन्तु एक काल्पनिक राशि $i\theta$ का घातीय फलन $e^{i\theta}$ आवर्त होता है, क्योंकि

$$e^{2ni\pi} = \cos 2n\pi + i \sin 2n\pi = 1,$$

जिससे $e^{i\theta} . e^{2in\pi} = e^{i(\theta + 2n\pi)} = e^{i\theta}$

जहाँ θ वास्तविक है तथा n एक पूर्ण संख्या है।

इससे स्पष्ट है कि θ में 2π या 2π के अपवर्त्य जोड़ने से $e^{i\theta}$ का मान परिवर्तित नहीं होता है। अतएव $e^{i\theta}$ का आवर्तक 2π है।

५.११ मिश्र काल्पनिक राशियों का विश्लिष्टीकरण—

आॅयलर के प्रमेय एवं $\sin\theta$, $\cos\theta$ के घातीय मानों के प्रयोग से हम मिश्र काल्पनिक राशियों को वास्तविक तथा काल्पनिक अंशों में विश्लिष्ट कर सकते हैं। मिश्र काल्पनिक राशियों के वास्तविक एवं काल्पनिक खंडों को अलग-अलग ज्ञात करना महत्वपूर्ण है। श्रेणियों का योग ज्ञात करने में यह प्रयुक्त होगा।

उदाहरण १। $e^{e^{i\theta}}$ के वास्तविक तथा काल्पनिक अंश ज्ञात करो।

हमें ज्ञात है कि

$$e^{e^{i\theta}} = e^{(\cos\theta + i\,\sin\theta)},$$

$$= e^{\cos\theta} \times e^{i\sin\theta},$$

$$= e^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta) + i\sin(\sin\theta)],$$

जो $A + iB$ के रूप का है।

उदाहरण २। $exp\left(\frac{x-a+iy}{x+a+iy}\right)$ को $A+iB$ के रूप में व्यक्त करो।

$$exp\left[\frac{x-a+iy}{x+a+iy}\right] = exp\left[\frac{(x-a+iy)(x+a-iy)}{(x+a)^2+y^2}\right],$$

$$= exp\left[\frac{x^2-a^2+y^2+2iay}{(x+a)^2+y^2}\right],$$

$$= exp\left[\frac{x^2-a^2+y^2}{(x+a)^2+y^2} + i\,\frac{2ay}{(x+a)^2+y^2}\right],$$

$$= exp\left[\frac{x^2-a^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}\right] \times exp\left[\frac{2iay}{(x+a)^2+y^2}\right],$$

$$= exp\left[\frac{x^2-a^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}\right]\left[\cos\left\{\frac{2ay}{(x+a)^2+y^2}\right\}\right.$$
$$\left.+i\sin\left\{\frac{2ay}{(x+a)^2+y^2}\right\}\right]$$

जो $A+iB$ के रूप का है, जहाँ

$$A = exp.\left[\frac{x^2-a^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}\right]\cos\frac{2ay}{(x+a)^2+y^2},$$

तथा $$B = exp.\left[\frac{x^2-a^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}\right]\sin\frac{2ay}{(x+a)^2+y^2}.$$

उदाहरण ३। सिद्ध करो कि

$$(a+ib)^{m/n}+(a-ib)^{m/n}=2(a^2+b^2)^{\frac{m}{2n}}.\cos\left\{\frac{m}{n}\left(\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)\right\}.$$

मान लें कि $a=r\cos\theta$, $b=r\sin\theta$, ... (1)

तव $a+ib=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$,

तथा $a-ib=r(\cos\theta-i\sin\theta)=re^{-i\theta}$.

जिससे $(a+ib)^{m/n}+(a-ib)^{m/n}=r^{m/n}\{e^{i\theta m/n}+e^{-i\theta m/n}\}$
$=r^{m/n}.\,2\cos(m/n)\theta$ .... (2)

अव (1) से $r=(a^2+b^2)^{1/2}$ तथा $\theta=\tan^{-1}b/a$.

अतएव (2) में r और θ का मान रखने पर हमें प्राप्त है

$$(a+ib)^{m/n}+(a-ib)^{m/n}=2(a^2+b^2)^{m/2n}\cos\{(m/n)\tan^{-1}b/a\}.$$

उपर्युक्त की रीति से सिद्ध करो कि

$$(1+i)^n+(1-i)^n=2^{\frac{1}{2}n+1}\cos\frac{n\pi}{4}.$$ [आगरा, १९४७]

उदाहरण ४। दिखाओ कि

$$e^{(a+ib)x}-e^{(a-ib)x}=2i\,e^{ax}.\sin bx.$$

वाईं ओर का व्यंजक

$$= e^{ax}.e^{ibx}-e^{ax}.e^{-ibx}$$

$$= e^{ax}(e^{ibx} - e^{-ibx})$$

$$= e^{ax} \times 2i \sin bx \qquad \text{(परिभाषा से)}$$

अतः $\quad e^{(a+ib)x} - e^{(a-ib)x} = 2i\, e^{ax} \sin bx$.

उदाहरण ५ । सिद्ध करो कि

$$e^{-(\theta+i\phi)} = (\cosh\,\theta - \sinh\,\theta)(\cos\phi - i\,\sin\,\phi)$$

हमें विदित है कि

$$e^{-\theta - i\phi} = e^{-\theta} \times e^{-i\phi},$$

$$= e^{i\,(i\theta)} \times e^{-i\phi},$$

$$= [\cos\,(i\theta) + i\sin\,(i\theta)] \times [\cos\phi - i\sin\phi],$$

$$= [\cosh\,\theta + i.i\,\sinh\,\theta]\,[\cos\phi - i\,\sin\phi],$$

$$= [\cosh\,\theta - \sinh\,\theta]\,[\cos\phi - i\sin\phi].$$

अध्याय ५ पर उदाहरण

1. यदि z मिश्र काल्पनिक राशि हो, तो $\sin z$ एवं $\cos z$ की परिभाषा से सिद्ध करो कि

    (i) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$ [आगरा, १९४३]

    (ii) $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z,$

    (iii) $\sin 2z = 2 \sin z \cos z,$

    (iv) $\sin 3z = 3 \sin z - 4 \sin^3 z,$

    (v) $\sin(-z) = -\sin z,$

    (vi) $\cos(-z) = \cos z,$

    (vii) $\sin 2z/(1 - \cos z) = \cot z$.

2. सिद्ध करो कि

$$exp.\left\{(2n+1)i\frac{\pi}{2}\right\} = (-1)^n i\ .$$

3. दिखाओ कि

$$exp.\ \{(x+iy)^2\}$$

के वास्तविक तथा काल्पनिक अंश क्रमशः निम्न हैं—

$exp.(x^2-y^2).\ \cos 2xy,\quad exp.(x^2-y^2)\sin 2xy$.

4. सरल करो

$$e^{e^{i\theta}} - e^{-e^{-i\theta}}.$$

5. दिखाओ कि

$$\tan(x+iy) = \frac{2\sin 2x + i(e^{2y}-e^{-2y})}{e^{2y}+e^{-2y}+2\cos 2x}.$$

6. निम्नको $A+iB$ के रूप में व्यक्त करो—

(i) $e^{\sin(x+iy)}$,

(ii) $\cos^2(x+iy)$,

(iii) $e^i + e^{-i}$,

(iv) $e^{e^{i\pi}}$,

(v) $e^{x(\cos\alpha + i\sin\alpha)}$,

(vi) $e^{[e^{\cos\theta} + e^{i\cos\theta}]}$.

7. सिद्ध करो कि

$$\frac{\sin(x+iy)}{\sin(x-iy)} + \frac{\sin(x-iy)}{\sin(x+iy)} = \frac{2-(e^{2y}+e^{-2y})\cos 2x}{4\sin^2 x + (e^y - e^{-y})^2}.$$

8. दिखाओ कि

$$\left\{\sin(\alpha-\theta) + e^{i\alpha}\sin\theta\right\}^n = \sin^{n-1}\alpha \left\{\sin(\alpha - n\theta) + e^{i\alpha}\sin n\theta\right\}.$$

9. निम्न को $A+iB$ के रूप में व्यक्त करो

$$(1-e^{in\theta})/(1-e^{i\theta}).$$

10. सिद्ध करो कि

$$\frac{e^{ix}-e^{iy}}{e^{ix}+e^{iy}}=i\tan\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

11. यदि a तथा θ वास्तविक हों, तो सिद्ध करो कि

$z/(z^2+a^2)$ पूर्णतय: वास्तविक है, तथा

$(a-iz)/(a+iz)$ पूणंतय: काल्पनिक है,

जहाँ $z=a(\cos\theta+i\sin\theta)$.

12. सिद्ध करो कि

$$\frac{e^{im\theta}}{e^{in\phi}}+\frac{e^{in\phi}}{e^{im\theta}}=2\cos(m\theta-n\phi),$$

जहाँ m,n पूर्ण संख्यायें हैं। [वनारस, १९४१]

13. $\tan^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}i\phi\right)$ के वास्तविक एवं काल्पनिक अंश ज्ञात करो।

14. दिखाओ कि

$$\tan^{-1}\left[i\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right]=-\tfrac{1}{2}i\log\frac{\alpha}{x}.$$

[संकेत—मान लो $i(x-\alpha)/(x+\alpha)=\tan\delta$]

15. यदि p तथा q इकाई के काल्पनिक घनमूल हों, तो सिद्ध करो कि

$$p\,e^{px}+qe^{qx}=-e^{x/2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}+\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}\right].$$

16. यदि $$i^{i^{i^{\cdots\cdots\theta}}}=A+iB,$$

तो $$\tan\frac{\pi A}{2}=\frac{B}{A}\text{ तथा }A^2+B^2=e^{-\pi B}.$$

17. सिद्ध करो $\sin^{-1}(i)=2n\pi-i\log(\sqrt{2}-1)$.

18. सिद्ध करो $\tan\left\{i \log \frac{a-ib}{a+ib}\right\} = \frac{2ab}{a^2-b^2}$.

19. सिद्ध करो $x^i = e^{-2n\pi}\{\cos(\log x) + i \sin(\log x)\}$.

20. यदि $i^{\alpha+i\beta} = \alpha + i\beta$, तो सिद्ध करो

$$\alpha^2 + \beta^2 = e^{-(4n+1)\pi\beta} .$$

21. सरल करो $\frac{\tan(x+iy)}{\tan(x-iy)} + \frac{\tan(x-iy)}{\tan(x+iy)}$.

22. यदि $\sin(\theta+\phi) = \cos\beta + i \sin\beta$ तो
$\pm \sinh^2\phi = \sin\beta$ तथा $\cos^4\theta = \sin^2\beta$.

3. यदि $\tan(x+iy) = \sin(\alpha+i\beta)$ तो सिद्ध करो
$\coth\beta \sinh 2y = \cot\alpha \sin 2x$.

अध्याय ६

अतिपरवलयिक फलन

६.०१ **परिभाषा**—गत अध्याय के § ५.०५ में हमनें अतिपरवलयिक **cosines** तथा sines की परिभाषा दी थी

$$\cosh\theta = \tfrac{1}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta}) \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\sinh\theta = \tfrac{1}{2}(e^{\theta} - e^{-\theta}) \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

अब (1) तथा (2) से

$$e^{\theta} = \cosh\theta + \sinh\theta,$$

तथा $$e^{-\theta} = \cosh\theta - \sinh\theta,$$

यहाँ θ वास्तविक या काल्पनिक है। ये परिणाम ऑयलर के सूत्र के समान हैं।

अन्य अतिपरवलयिक फलनों की परिभाषा हम इस प्रकार देते हैं—

$$\tanh\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta} = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}},$$

$$\coth\theta = \frac{\cosh\theta}{\sinh\theta} = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{e^{\theta} - e^{-\theta}},$$

$$\operatorname{cosech}\theta = \frac{1}{\sinh\theta} = \frac{2}{e^{\theta} - e^{-\theta}},$$

तथा $$\operatorname{sech}\theta = \frac{1}{\cosh\theta} = \frac{2}{e^{\theta} + e^{-\theta}}.$$

हम सरलता से देख सकते हैं कि अतिपरवलयिक तथा वृत्तुल फलनों में निम्न सम्बन्ध हैं

$$\sinh\theta = \frac{(\sin i\theta)}{i} = -i\sin(i\theta),$$

$$\cosh\theta = \cos(i\theta),$$

$$\operatorname{cosech}\theta = i\operatorname{cosec}(i\theta),$$

$$\operatorname{sech}\theta = \sec(i\theta),$$
$$\tanh\theta = -i\tan(i\theta),$$
तथा
$$\coth\theta = i\cot(i\theta).$$

६.०२ अतिपरवलयिक फलनों के सूत्र—वृत्तुल फलनों में प्रत्येक संबंध के संगत अतिपरवलयिक फलनों में भी संबंध होता है। उदाहरणार्थ

(i) $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$,

(ii) $\operatorname{sech}^2\theta + \tanh^2\theta = 1$,

(iii) $\coth^2\theta - \operatorname{cosech}^2\theta = 1$.

यहाँ (i) को सिद्ध करने के लिये हम जानते हैं कि

$$e^{\theta} = \cosh\theta + \sinh\theta \quad \text{तथा } e^{-\theta} = \cosh\theta - \sinh\theta$$

अतः दोनों के गुणन से

$$e^{\theta} \times e^{-\theta} = (\cosh\theta + \sinh\theta) \times (\cosh\theta - \sinh\theta)$$

$$\therefore \cosh^2\theta - \sinh^2\theta = e^0 = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

समीकरण (1) के दोनों पक्षों को $\cosh^2\theta$ से भाग देने पर

$$1 - \tanh^2\theta = \frac{1}{\cosh^2\theta} = \operatorname{sech}^2\theta$$

$$\therefore \operatorname{sech}^2\theta + \tanh^2\theta = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

अब (1) के दोनों पक्षों को $\sinh^2\theta$ से भाग देने पर

$$\coth^2\theta - 1 = \frac{1}{\sinh^2\theta} = \operatorname{cosech}^2\theta$$

$$\therefore \coth^2\theta - \operatorname{cosech}^2\theta = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

अतिपरवलयिक फलनों के अन्य सूत्र निम्न हैं—

$$\sinh(\theta \pm \phi) = \sinh\theta\cosh\phi \pm \cosh\theta\sinh\phi,$$
$$\cosh(\theta \pm \phi) = \cosh\theta\cosh\phi \pm \sinh\theta\sinh\phi,$$
$$\tanh(\theta \pm \phi) = \frac{\tanh\theta \pm \tanh\phi}{1 \pm \tanh\theta\tanh\phi},$$
$$\sinh 2\theta = 2\sinh\theta\cosh\theta,$$
$$\cosh 2\theta = \cosh^2\theta + \sinh^2\theta = 2\cosh^2\theta - 1$$
$$= 1 + 2\sinh^2\theta,$$

$$\tanh 2\theta = \frac{2 \tanh \theta}{1+\tanh^2 \theta},$$

$$\sinh \theta + \sinh \phi = 2 \sinh \tfrac{1}{2}(\theta+\phi) \cosh \tfrac{1}{2}(\theta-\phi),$$

$$\sinh \theta - \sinh \phi = 2 \cosh \tfrac{1}{2}(\theta+\phi) \sinh \tfrac{1}{2}(\theta-\phi),$$

$$\cosh \theta + \cosh \phi = 2 \cosh \tfrac{1}{2}(\theta+\phi) \cosh \tfrac{1}{2}(\theta-\phi),$$

$$\cosh \theta - \cosh \phi = 2 \sinh \tfrac{1}{2}(\theta+\phi) \sinh \tfrac{1}{2}(\theta-\phi).$$

उपरोक्त परिणाम या तो संगत वृत्तूल फलनों के सूत्र से प्राप्त हो सकते हैं या अतिपरवलयिक फलनों की परिभाषा से ।

६.०३ **ऑसबॉर्न का नियम**--इस नियम से वृत्तुल फलनों के किसी सूत्र से अतिपरवलयिक फलनों का संगत सूत्र प्राप्त हो सकता है। इस नियम के अनुसार किसी सूत्र में प्रत्येक वृत्तुल फलन के स्थान पर उसका संगत अतिपरवलयिक फलन रख दें तथा दो sines के प्रत्येक गुणनफल का चिन्ह बदल दें । उदाहरणार्थ

$$\tan(\theta+\phi) = \frac{\tan \theta + \tan \phi}{1 - \tan \theta \tan \phi},$$

अतएव $\tanh(\theta+\phi) = \dfrac{\tanh \theta + \tanh \phi}{1+\tanh \theta \tanh \phi}$,

क्योंकि $\tan\theta \tan\phi$ में दो sines के गुणनफल का समावेश है ।

६.०४ **$\sinh \theta$ तथा $\cosh \theta$ का विस्तार**--

हमें विदित है कि

$$\sinh \theta = \tfrac{1}{2}(e^{\theta} - e^{-\theta})$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\left\{1+\theta+\frac{\theta^2}{2!}+\ldots\ldots\right\} - \left\{1-\theta+\frac{\theta^2}{2!}-\ldots\ldots\right\}\right],$$

$$= \theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

इसी प्रकार $\cosh \theta = \tfrac{1}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta})$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\left\{1+\theta+\frac{\theta^2}{2!}+\ldots\right\}+\left\{1-\theta+\frac{\theta^2}{2!}-\ldots\right\}\right]$$

$$=1+\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}+\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

६.०५ अतिपरवलयिक फलनों के आवर्तक--

हमें परिभाषा से प्राप्त है कि

$$\sinh(\theta+2in\pi)=\tfrac{1}{2}\left[e^{(\theta+2in\pi)}-e^{-(\theta+2in\pi)}\right]$$
$$=\tfrac{1}{2}\left[e^{\theta}.e^{2in\pi}-e^{-\theta}.e^{-2in\pi}\right]$$
$$=\tfrac{1}{2}(e^{\theta}-e^{-\theta})$$

क्योंकि $e^{2in\pi}=1$, जहाँ n एक पूर्ण संख्या है।

अतएव $\sinh(\theta+2in\pi)=\sinh\theta$.

तथा इसी प्रकार $\cosh(\theta+2in\pi)=\cosh\theta$.

उपर्युक्त की भांति यह भी दिखाया जा सकता है कि

$$\sinh(\theta+in\pi)=-\sinh\theta,$$

तथा $$\cosh(\theta+in\pi)=-\cosh\theta.$$

अतः $$\tanh(\theta+in\pi)=\tanh\theta$$

अतएव अतिपरवलयिक फलन आवर्त हैं जिनके आवर्तक काल्पनिक राशियाँ हैं। $\tanh\theta$ का आवर्त $i\pi$ तथा $\sinh\theta$ एवं $\cosh\theta$ का $2i\pi$ है।

६.०६ $\sinh\theta$ तथा $\cosh\theta$ के मुख्य प्रगुण--

(i) $\sinh\theta$ का चिन्ह वही होता है जो θ का, तथा $\cosh\theta$ सदैव धनात्मक होता है।

(ii) θ की वृद्धि के अनुसार $\sinh\theta$ उत्तरोत्तर बढ़ता जाता है। यदि θ ऋणात्मक हो, तो θ की वृद्धि के अनुसार $\sinh\theta$ उत्तरोत्तर घटता जाता है, तथा यदि θ धनात्मक हो अथवा ऋणात्मक, इसकी वृद्धि के अनुसार $\cosh\theta$ उत्तरोत्तर बढ़ता जाता है। इसको हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं —

$\sinh\theta\to\infty$ जब $\theta\to\infty$,

परन्तु $\sinh\theta\to-\infty$ जब $\theta\to-\infty$.

तथा $\cosh\theta\to\infty$ जब $\theta\to\infty$ या $\theta\to-\infty$.

(iii) $\cosh\theta$ का न्यूनतम मान 1 है, जो $\theta=0$ रखने पर प्राप्त होता है।

(iv) $\lim\limits_{\theta\to\infty} \dfrac{\sinh\theta}{e^{\theta}} = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{\theta\to-\infty} \dfrac{\sinh\theta}{e^{-\theta}} = -\frac{1}{2}$.

६.०७ $\tanh\theta$ तथा $\coth\theta$ के प्रगुण —

(i) $\tanh\theta$ तथा $\coth\theta$ दोनों θ के विषम फलन हैं।

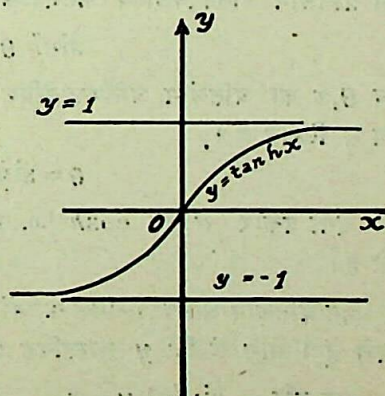
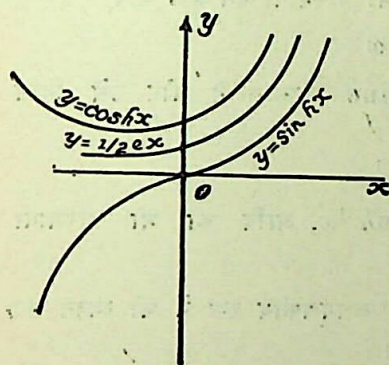
(ii) θ की वृद्धि के अनुसार $\tanh\theta$ उत्तरोत्तर बढ़ता है तथा $\coth\theta$ उत्तरोत्तर घटता है।

(iii) $\lim\limits_{\theta\to\infty} \tanh\theta = 1$, $\lim\limits_{\theta\to-\infty} \tanh\theta = -1$.

$\lim\limits_{\theta\to\infty} \coth\theta = 1$, $\lim\limits_{\theta\to-\infty} \coth\theta = -1$.

(iv) विन्दु $x=0$ पर $y=\tanh x$ के स्पर्शी का ढाल 1 है।

(v) $|\tanh\theta|<1$, तथा $|\coth\theta|>1$, θ के समस्त मानों के लिए।

६.०८ अतिपरवलयिक फलनों के लेखा चित्र—$\sinh\theta$, $\cosh\theta$ तथा $\tanh\theta$ के लेखा चित्र उपर्युक्त परिणामों की सहायता से इस प्रकार वनाये जा सकते हैं जैसा कि नीचे दिये गये चित्रों में दिखाया गया है।

जिस प्रकार वृत्तुल फलन दीर्घवृत्त या वृत्त से संबंधित हैं, उसी प्रकार अतिपरवलयिक फलन अतिपरवलय अथवा सम अतिपरवलय से संबंधित हैं। एक दीर्घवृत्त

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

पर किसी विन्दु के निर्देशांक. $x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$ लिखे जा सकते हैं। एक वृत्त

$$x^2+y^2=a^2$$

कि विशिष्ट स्थिति में किसी बिन्दु के निर्देशांक $x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta$. के रूप में व्यक्त किये जा सकते हैं।

इसी प्रकार अतिपरवलय

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

पर किसी विन्दु के निर्देशांक है $x=a\cosh\theta,\ y=b\sinh\theta$, तथा सम अतिपरवलय

$$x^2-y^2=a^2$$

की विशेष स्थिति में किसी विन्दु के निर्देशांक $x=\pm a\cosh\theta,\ y=a\sinh\theta$, लिखे जा सकते हैं।

अतिपरवलय से संबंधित होने के कारण ही ये फलन अतिपरवलयिक कहलाते हैं।

६.०९ प्रतिलोम अतिपरवलयिक फलन—प्रतिलोम वृत्तुल फलनों की भांति हम प्रतिलोम अतिपरवलयिक फलनों की भी परिभाषा देते हैं। यदि

$$\sinh\theta=x$$

तब θ, x का प्रतिलोम अतिपरवलयिक sine कहलाता है और उसे निम्न रूप से लिखते हैं।

$$\theta=\sinh^{-1}x.$$

इसी प्रकार से हम $\cosh^{-1}x$, $\tanh^{-1}x$, आदि की भी परिभाषा देते हैं।

हम प्रतिलोम अतिपरवलयिक फलनों को लघुगुणकीय रूप में भी व्यक्त कर सकते हैं। मान लें कि y वास्तविक है।

अब यदि $\sinh^{-1}y=x$,

तब $y = \sinh x$

$= \frac{1}{2}(e^x - e^x)$,

जिससे $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$.

इस वर्गात्मक समीकरण को e^x के लिये हल करने पर

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} = y \pm \sqrt{(y^2+1)},$$

$\therefore \quad x = \log [y \pm \sqrt{(y^2+1)}]$.

परन्तु परिभाषा से $x = \sinh^{-1} y$

अतः $\sinh^{-1} y = \log [y \pm \sqrt{(y^2+1)}]$

$\therefore \quad \sinh^{-1} y = \log [y + \sqrt{(y^2+1)}]$.

y के दोनों मानों में से केवल धनात्मक मान ही लिया जाता है क्योंकि y का दूसरा मान जो $\log [y - \sqrt{(y^2+1)}]$ है एक काल्पनिक राशि है जैसा कि आगे दिखाया जायेगा। अतः वह अमान्य है क्योंकि y वास्तविक है।

इसी प्रकार मान लें कि y वास्तविक है और

यदि $\cosh^{-1} y = x$

तब $y = \cosh x$,

$= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$,

जिससे $e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$,

$\therefore \quad e^x = y \pm \sqrt{(y^2-1)}$

$\therefore \quad x = \log [y \pm \sqrt{(y^2-1)}]$,

अर्थात् $\cosh^{-1} y = \log [y \pm \sqrt{(y^2-1)}]$.

हमें विदित है कि

$$y - \sqrt{(y^2-1)} = \frac{1}{y + \sqrt{(y^2-1)}}$$

अतः $\cosh^{-1} y = \log [y \pm \sqrt{(y^2-1)}] = \pm \log [y + \sqrt{(y^2-1)}]$.

इसी प्रकार हम $\tanh^{-1} y$ का मान भी निकाल सकते हैं। y वास्तविक होने पर $\cosh^{-1} y$ तथा $\tanh^{-1} y$ भी एकमानीय होते हैं और यह मान धनात्मक चिन्ह वाला मान होता है।

उदाहरण १ । यदि $\tan(x+iy)=\sin(A+iB)$, तो दिखाओ कि

$$\frac{\sin 2x}{\sinh 2y}=\frac{\tan A}{\tanh B}.$$ [इलाहाबाद, १९४६; आगरा, १९५०]

हमें विदित है कि

$$\tan(x+iy)=\frac{\sin(x+iy)}{\cos(x+iy)}$$

$$=\frac{\sin(x+iy)\cos(x-iy)}{\cos(x+iy)\cos(x-iy)}$$

$$=\frac{\sin 2x+\sin 2iy}{\cos 2x+\cos 2iy}$$

$$=\frac{\sin 2x+i\sinh 2y}{\cos 2x+\cosh 2y} \quad \ldots\ldots (1)$$

पुनः $\sin(A+iB)=\sin A\cos iB+\cos A\sin iB$

$$=\sin A\cosh B+i\cos A\sinh B \ldots\ldots (2)$$

अब (1) तथा (2) के वास्तविक एवं काल्पनिक अंशों को बराबर करने पर

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x+\cosh 2y}=\sin A\cosh B \quad \ldots\ldots (3)$$

तथा $$\frac{\sinh 2y}{\cos 2x+\cosh 2y}=\cos A\sinh B \quad \ldots\ldots (4)$$

अब (3) को (4) से भाग देने पर प्राप्त होता है

$$\frac{\sin 2x}{\sinh 2y}=\frac{\sin A\cosh B}{\cos A\sinh B}=\frac{\tan A}{\tanh B}.$$

द्वितीय विधि—

क्योंकि $\tan(x+iy)=\sin(A+iB)$,

$\therefore \tan(x-iy)=\sin(A-iB)$.

अब $$\frac{\tan(x+iy)+\tan(x-iy)}{\tan(x+iy)-\tan(x-iy)}$$

$$=\frac{\sin(A+iB)+\sin(A-iB)}{\sin(A+iB)-\sin(A-iB)},$$

$$\therefore \quad \frac{\sin\{(x+iy)+(x-iy)\}}{\sin\{(x+iy)-(x-iy)\}} = \frac{\sin A\cos(iB)}{\cos A\sin(iB)},$$

$$\therefore \quad \frac{\sin 2x}{\sin(2iy)} = \frac{\tan A}{\tan(iB)}$$

$$\frac{\tan A}{i\tanh B} = \frac{\sin 2x}{i\sinh 2y}$$

अतः $$\frac{\sin 2x}{\sinh 2y} = \frac{\tan A}{\tanh B}.$$

उदाहरण २। यदि $\tan(x+iy) = A+iB$,

तो सिद्ध करो कि

$$A^2+B^2+2A\cot 2x = 1. \quad \text{[आगरा, १९४७]}$$

क्योंकि $\tan(x+iy) = A+iB$,

$\therefore \quad \tan(x-iy) = A-iB.$

अब $\tan 2x = \tan[(x+iy)+(x-iy)]$,

$$= \frac{\tan(x+iy)+\tan(x-iy)}{1-\tan(x+iy)\tan(x-iy)}$$

$$= \frac{(A+iB)+(A-iB)}{1-(A+iB)(A-iB)} \quad \text{मान रखने पर}$$

$$= \frac{2A}{1-(A^2+B^2)}$$

$\therefore \quad 1-A^2-B^2 = 2A\cot 2x,$

अथवा $A^2+B^2+2A\cot 2x = 1.$

उदाहरण ३। यह मानकर कि

$$\sin(A+iB) = x+iy,$$

सिद्ध करो कि

$$\frac{x^2}{\cosh^2 B} + \frac{y^2}{\sinh^2 B} = 1, \text{ एवं } \frac{x^2}{\sin^2 A} - \frac{y^2}{\cos^2 A} = 1.$$

[बनारस, १९४६]

हमें विदित है कि

$$\sin(A+iB) = \sin A\cos(iB)+\cos A\sin(iB)$$
$$= \sin A\cosh B+i\cos A\sinh B.$$

अब वास्तविक तथा काल्पनिक अंशों को बराबर करने पर

$$x=\sin A\cosh B,$$

एवं $$y=\cos A\sinh B.$$

अब $x/\cosh B=\sin A$, तथा $y/\sinh B=\cos A$.

इनके वर्गों का योग करने पर

$$\frac{x^2}{\cosh^2 B}+\frac{y^2}{\sinh^2 B} = \sin^2 A+\cos^2 A=1.$$

पुनः $x/\sin A=\cosh B$, तथा $y/\cos A=\sinh B$.

इनके वर्गोंका अन्तर लेने पर

$$\frac{x^2}{\sin^2 A}-\frac{y^2}{\cos^2 A} = \cosh^2 B-\sinh^2 B=1.$$

अध्याय ६ पर उदाहरण

1. $\sinh\theta$ तथा $\cosh\theta$ की परिभाषा से निम्न परिणाम सिद्ध करो—

(i) $\cosh 0=1$, (ii) $\sinh 0=0$,

(iii) $\cosh(-x)=\cosh x$, (iv) $\sinh(-x)=-\sinh x$,

(v) $\tanh(-x)=-\tanh x$,

(vi) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$,

(vii) $\text{sech}^2 x=1-\tanh^2 x$,

(viii) $\text{cosech}^2 x=\coth^2 x-1$,

(ix) $\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$,

(x) $\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$,

(xi) $\cosh x= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\ldots,$

(xii) $\sinh x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\ldots.$

2. (i) $\sinh(A+B)+\sinh(A-B)=2\sinh A\cosh B$,

(ii) $\sinh(A+B)-\sinh(A-B)=2\cosh A\sinh B$,

(iii) $\cosh(A+B)+\cosh(A-B)=2\cosh A\cosh B$,

(iv) $\cosh(A+B)-\cosh(A-B)=2\sinh A\sinh B$.

3. (i) $\sinh A+\sinh B=2\sinh\frac{1}{2}(A+B)\cosh\frac{1}{2}(A-B)$,

(ii) $\sinh A-\sinh B=2\cosh\frac{1}{2}(A+B)\sinh\frac{1}{2}(A-B)$,

(iii) $\cosh A+\cosh B=2\cosh\frac{1}{2}(A+B)\cosh\frac{1}{2}(A-B)$,

(iv) $\cosh A-\cosh B=2\sinh\frac{1}{2}(A+B)\sinh\frac{1}{2}(A-B)$.

4. यदि n एक धनात्मक पूर्ण संख्या हो, तो सिद्ध करो कि

(i) $\sinh nx=\cosh^n x\,[{}^nC_1\tanh x+{}^nC_3\tanh^3 x+\ldots]$,

(ii) $\cosh nx=\cosh^n x\,[1+{}^nC_2\tanh^2 x+{}^nC_4\tanh^4 x+\ldots\ldots\ldots]$,

(iii) $\tanh nx=\dfrac{{}^nC_1\tanh x+{}^nC_3\tanh^3 x+\ldots\ldots\ldots}{1+{}^nC_2\tanh^2 x+{}^nC_4\tanh^4 x+\ldots\ldots}$.

[संकेत — $2\cosh nx=(\cosh x+\sinh x)^n+(\cosh x-\sinh x)^n$
तथा $2\sinh nx=(\cosh x+\sinh x)^n-(\cosh x-\sinh x)^n$]

5. $\cot(x+iy)$ को $A+iB$ के रूप में व्यक्त करो।

[आगरा, १९४२]

6. निम्न को $A+iB$ के रूप में व्यक्त करो

(i) $\sec(x+iy)$, (ii) $\operatorname{cosec}(x+iy)$.

7. यदि $\tan x=\tan\alpha.\tanh\beta$,

तथा $\tan y=\cot\alpha.\tanh\beta$,

तो दिखाओ कि $\tan(x+y)=\sinh 2\beta\operatorname{cosec}2\beta$.

[बनारस, १९४४]

8. यदि $\tanh x = \sin \alpha \operatorname{sech} \beta$,

तथा $\tan y = \sec \alpha \sinh \beta$,

तो $\cosh(x+iy)$ के वास्तविक एवं काल्पनिक अंश ज्ञात करो।

9. यदि $x+iy = \cosh(A+iB)$, तो दिखाओ कि

$$\frac{x^2}{\cosh^2 A} + \frac{y^2}{\sinh^2 A} = 1, \quad \text{एवं} \quad \frac{x^2}{\cos^2 B} - \frac{y^2}{\sin^2 B} = 1.$$

[यू० पी० सिविल सर्विस, १९४४]

10. राशियाँ A, B, x, y में निम्न सम्बन्ध दिया है

$$\cosh(x+iy) = \cot(A+iB).$$

तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\sinh 2B}{\sin 2A} = -\tanh x . \tan y,$$

तथा $$\coth 2B = -\frac{\cosh 2x + \cos 2y + 2}{4 \sinh x \sin y}.$$

[यू० पी० सिविल सर्विस, १९४७]

11. यदि $x+iy = a \cos(\theta - i\phi)$, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2 \theta} - \frac{y^2}{a^2 \sin^2 \theta} = 1.$$ [इलाहाबाद, १९४५]

12. दिखाओ कि

$$\frac{\cos(x+iy)}{\cos(x-iy)} + \frac{\cos(x-iy)}{\cos(x+iy)} = \frac{2+2\cos 2x \cosh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}.$$

13. यदि $\sin(x+iy) = \cos\theta + i \sin\theta$, तो सिद्ध करो कि

$$\tan x . \tan\theta = \tanh y.$$

[संकेत—संयुग्मी समिश्र काल्पनिक राशियों के प्रगुण का प्रयोग करो।]

14. यदि $\cosh u = \sec\theta$, तब दिखाओ कि

$$\sinh u = \tan\theta,\ \tanh u = \sin\theta,\ \tan^2\theta/2 = \tanh^2 u/2$$

तथा $$u = \log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = \log(\sec\theta+\tan\theta)$$

एवं $$-u = \log(\sec\theta-\tan\theta).$$

[टिप्पणी—गुडरमैन का फलन—यदि $\cosh u = \sec\theta$, तब θ को प्रायः u का गुडरमैनियन फलन कहते हैं और उसे $gd\ u$ से प्रकट करते हैं।

अतः $gd\ u = \theta = \sec^{-1}(\text{oosh}\ u)$

$= \tan^{-1}(\sinh u)$,

तथा $u = gd^{-1}\theta = \log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$]

15. यदि $\cosh u = \sec\theta$, तथा

$$u = \theta + a_3\theta^3 + a_5\theta^5 + \ldots\ldots,$$

तो दिखाओ कि

$$\theta = u - a_3u^3 + a_5u^5 - \ldots\ldots.$$

16. यदि x न्यून कोण हो, तथा $y = \log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

तो सिद्ध करो कि

$$\cos x\cosh y = 1,$$

एवं $$\tfrac{1}{2}y = \sin x - \tfrac{1}{3}\sin^3 x + \tfrac{1}{5}\sin^5 x - \ldots\ldots.$$

[आगरा, १९४१]

अध्याय ७

मिश्र काल्पनिक चल राशि के बहुमान फलन

७.०१ मिश्र काल्पनिक राशियों के लघु गुणक--यदि u और z कोई दो राशियाँ हों और यदि $u=e^z$, तो हम z को u के नेपरीय लघुगुणक की परिभाषा मानते है तथा इसे निम्न रूप में व्यक्त करते हैं

$$z=\log_e u$$

अथवा केवल $z=\log u$ .... (1)

हमें विदित है कि x के किसी मान के लिए e^z अथवा u का एक ही मान होता है। अब हम सिद्ध करेंगे कि u के किसी निश्चित मान के लिए z अथवा $\log u$ के असंख्य मान होते हैं ।

हमें विदित है कि $e^{2in\pi}=1$,

इसलिए $u=e^z=e^z.e^{2in\pi}=e^{(z+2in\pi)}$,

जिससे $\log u=(z+2in\pi)$,

जहाँ n शून्य अथवा एक पूर्ण संख्या है ।

अतः उपर्युक्त से हम देखते हैं कि यदि z,u का लघुगुणक है तो $(z+2in\pi)$ भी u का लघुगुणक होगा । इस प्रकार हम कह सकते हैं कि किसी मिश्र काल्पनिक राशि के लघुगुणक के असंख्य मान होते हैं जो n को विभिन्न मान देने पर प्राप्त होंगे। अतः यह एक बहुमानीय फलन है और इसको Log से प्रकट करते हैं अर्थात्

$$\text{Log } u=(z+2in\pi)$$

और $\log u$ इसका मुख्य मान कहलाता है। Log u के मान में यदि $n=0$ रखदें तो Log u का मुख्य मान प्राप्त होता है

$$\therefore \quad \text{Log } u=2n\pi i+\log u$$

यदि u और z दोनों वास्तविक हों, तो z को u का मुख्य लघुगुणक कहते हैं। एक वास्तविक राशि का केवल एक ही वास्तविक लघुगुणक होगा और काल्पनिक

लघुगुणक असंख्य होंगे क्योंकि उपर्युक्त सिद्ध किया हुआ सूत्र वास्तविक राशियों में भी लागू है अर्थात्

$$\log u = z + 2n\pi i.$$

७.०२ यदि $u = a + ib = r(\cos\theta + i\ \sin\theta)$, एवं $z = x + iy$, तो $\text{Log}\ u$ के मान निकालना जहाँ $u = e^z$—

परिभाषा से

$$u = r\ (\cos\theta + i\ \sin\theta) = e^z = e^{x+iy}$$
$$= e^x . e^{iy}$$
$$= e^x . e^{i\ (y + 2n\pi)}$$
$$= e^x[\cos(y + 2n\pi) + i \sin(y + 2n\pi)]$$

अब वास्तविक तथा काल्पनिक अंशों को बराबर करने पर

$$r = e^x \text{ तथा } \theta = y + 2n\pi$$

जिससे $\quad x = \log r,\ y = \theta - 2n\pi = \theta + 2k\pi$

जहाँ k एक पूर्ण संख्या है।

$$\therefore \text{Log}\ u = z = x + iy$$
$$= \log r + i\ (\theta + 2k\pi)$$
$$= \log\ (a^2 + b^2)^{1/2} + i\ (2k\pi + \tan^{-1}\ b/a)$$

$$\therefore \text{Log}\ (a + ib) = \text{Log}\ [r\ (\cos\theta + i \sin\theta)] = \log\ (a^2 + b^2)^{1/2} + i(2k\pi + \tan^{-1}\ b/a)$$

अत: $u = (a + ib)$ के मुख्य लघुगुणक का मान निम्न है

$$\log u = \log\ (a + ib) = \log\ (a^2 + b^2)^{1/2} + i\ \tan^{-1}\ b/a$$
$$= \log r + i\theta$$

जहाँ $r = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ तथा $\theta = \tan^{-1}\ b/a.$

यहाँ यह ध्यान रखना चाहिए कि मुख्य मान में θ ऐसा होना चाहिए कि $\quad -\pi < \theta < \pi$.

७.०३ मिश्र काल्पनिक राशियों के लघुगणकों का गुणन तथा विभाजन—हम सिद्ध करेंगे कि यदि x और y दो मिश्र काल्पनिक राशियाँ हों तो

$$\text{Log } x+\text{Log } y=\text{Log } (xy),$$

$$\text{Log } x-\text{Log } y=\text{Log } (x/y)$$

तथा $\text{Log} x^n=n \text{ Log } x$, जहाँ n एक पूर्ण संख्या है।

मान लें कि

$x=r (\cos\theta+i \sin\theta)$, $y=k (\cos\phi+i \sin\phi)$ तो §७.०२ से हम लिख सकते हैं कि

$$\text{Log } x=\log r+i (\theta+2n\pi)$$

तथा $$\text{Log } y=\log k+i (\phi+2m\pi)$$

$$\therefore \text{Log } x+\text{Log } y=(\log r+\log k)+i (\theta+\phi+2s\pi)$$

जहाँ n और m पूर्ण संख्या है तथा $s=n+m$.

$$\therefore \text{Log } x+\text{Log } y=\log (rk)+i(\theta+\phi+2s\pi), \quad \ldots\ldots (1)$$

जहाँ r और k वास्तविक राशियाँ हैं। इसलिए $\log r+\log k=\log (rk)$ इसके साथ ही

$$\text{Log } (xy)=\log [rk (\cos\theta+i \sin\theta) (\cos\phi+i \sin\phi)]$$

$$=\log [rk \{ \cos (\theta+\phi)+i \sin (\theta+\phi) \}]$$

$$\therefore \text{Log } (xy)=\log (rk)+i (\theta+\phi+2 p\pi) \quad \ldots\ldots (2)$$

क्योंकि s तथा p पूर्ण संख्या हैं और इनका कोई भी मान हो सकता है अतएव $\text{Log} x+\text{Log } y$ का प्रत्येक मान $\text{Log } (xy)$ के किसी मान के बराबर होता है। विलोमतः $\text{Log } (xy)$ का प्रत्येक मान भी $\text{Log } x+\text{Log } y$ के किसी मान के बराबर होता है। अतः हमें प्राप्त है कि

$$\text{Log } x+\text{Log } y=\text{Log } (xy). \quad \ldots\ldots (3)$$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\text{Log } x-\text{Log } y=\text{Log } (x/y), \quad \ldots\ldots (4)$$

तथा विशेष स्थिति में

$$-\text{Log } x=\text{Log } (1/x) \quad \ldots\ldots (5)$$

परिणाम (3), (4) तथा (5) में किसी भी पक्ष का प्रत्येक मान दूसरे पक्ष के *किसी* भी मान के बराबर है।

यह आवश्यक नहीं है कि (3) तथा (4) लघुगुणकों के मुख्य मानों के लिए सत्य हों अर्थात् Log के स्थान पर log रखने पर भी लागू हों। इसका कारण है कि (3) में $(\theta+\phi)$ तथा (4) में $(\theta-\phi)$ उचित सीमा $-\pi$ से $+\pi$ के बाहर हो सकता है। उदाहरणार्थ

$$\log\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)+\log\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{3\pi i}{4}+\frac{3\pi i}{4},$$

$$=\frac{3\pi i}{2}.$$

परन्तु $\log\left[\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$$=\log\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\log\left[\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$=\log\left[\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right]$$

$$=-\frac{\pi i}{2}.$$

इससे प्रकट है कि परिणाम (3) सदैव ही मुख्य मानों के लिए लागू नहीं होता।

हम यह भी सिद्ध कर सकते हैं कि $n \operatorname{Log} x$ का प्रत्येक मान $\operatorname{Log} x^n$ के किसी मान के बराबर होता है। परन्तु (3) तथा (4) के विपरीत इस परिणाम का

विलोम सत्य नहीं है अर्थात् यह सत्य नहीं है कि $\text{Log}\, x^n$ का प्रत्येक मान $n \text{ Log}\, x$ के *किसी* एक मान के बराबर होता है। उदाहरणार्थ

$$\begin{aligned}\text{Log}\, i^2 &= \text{Log}\,(-1),\\ &= \text{Log}\,(\cos\pi + i\sin\pi),\\ &= \text{Log}\,[\cos(2n+1)\pi + i\sin(2n+1)\pi],\\ &= i\,(2n+1)\pi;\end{aligned}$$

परन्तु
$$\begin{aligned}2\text{ Log}\, i &= 2\text{ Log}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\\ &= 2\text{ Log}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi\right)\right]\\ &= 2\times i\,(\pi/2 + 2m\pi)\\ &= i\,(4m+1)\pi.\end{aligned}$$

अतएव $\text{Log}\, i^2$ के कुछ ही मान $2\text{ Log}\, i$ के मान हैं। शेप मान $2\text{ Log}\,(-i)$ के मान हैं।

उदाहरण १। यदि x वास्तविक हो, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{1}{2i}\text{ Log}\,\frac{1+ix}{1-ix} = \tan^{-1}x + n\pi.$$

मान लें कि $\tan^{-1}x = \theta$, अर्थात् $x = \tan\theta$, तब

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}\text{ Log}\,\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta} &= \frac{1}{2i}\text{ Log}\,\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}\\ &= \frac{1}{2i}\text{ Log}\left(e^{2i\theta}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\text{ Log}\, e^{2i\theta + 2n\pi i}\\ &= \frac{1}{2i}\times 2i\,(\theta + n\pi)\\ &= \theta + n\pi.\end{aligned}$$

अतः $\frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{1+ix}{1-ix} = \tan^{-1} x + n\pi.$

उदाहरण २। यदि $u = \log \tan(\pi/4 + \theta/2)$

$= \theta + a_3\theta^3 + a_5\theta^5 + \ldots\ldots\ldots$ तो सिद्ध करो

$\theta = u - a_3u^3 + a_5u^5 - \ldots\ldots$ [इलाहाबाद, १९५२]

हमें विदित है कि $\tan(\pi/4+\theta/2) = \frac{1+\tan\theta/2}{1-\tan\theta/2},$

$= (\cos\theta/2 + \sin\theta/2)/(\cos\theta/2 - \sin\theta/2)$

$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta},$

$= \sec\theta + \tan\theta .$ ....(1)

अतएव $u = \log\tan(\pi/4+\theta/2) = \log(\sec\theta + \tan\theta).$

$\therefore e^u = \sec\theta + \tan\theta,$ ....(2)

जिससे $e^{-u} = \sec\theta - \tan\theta .$ ....(3)

अतः $\frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) = \sec\theta$

या $\cosh u = \sec\theta$ ....(4)

पुनः $\frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) = \tan\theta$

या $\sinh u = \tan\theta.$ ....(5)

अब (4) और (5) को निम्न रूप में रखा

$\cos(iu) = \sec\theta$, तथा $(1/i)\sin(iu) = \tan\theta,$

अतः $\tan(iu) = i\sin\theta.$ ....(6)

$\therefore \cos\theta + i\sin\theta = \sec(iu) + \tan(iu)$

अथवा $e^{i\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{iu}{2}\right).$

अब दोनों पक्षों का लघुगुणक लेने पर

$$i\theta = \log \tan\left(\pi/4 + iu/2\right) \qquad \ldots\ldots\ldots (7)$$

अब हमें यह दिया हुआ है कि

$$u = \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \theta + a_3\theta^3 + a_5\theta^5 + \ldots\ldots\ldots$$

अतः (7) से θ के स्थान पर iu रखने पर

$$i\theta = iu + a_3(iu)^3 + a_5(iu)^5 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= i\left[u - a_3u^3 + a_5u^5 - \ldots\ldots\ldots\right]$$

$$\therefore \quad \theta = u - a_3u^3 + a_5u^5 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

७.०४ मिश्र काल्पनिक राशियों के मिश्र काल्पनिक घात—किसी मिश्र काल्पनिक राशि के मिश्र काल्पनिक घात से साधारणतयः कोई आशय नहीं निकलता। यदि u तथा z मिश्र काल्पनिक हों तथा z शून्य न हो, तो हमारा z^u की परिभाषा से आशय है कि

$$z^u = e^{u \operatorname{Log} z}, \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

जहाँ $\operatorname{Log} z$ बहुमानीय है।

जब a तथा x वास्तविक होते हैं, तब हमें विदित है कि

$$a^x = e^{x \log a},$$

क्योंकि यदि $y = a^x$, तो

$$\log y = \log(a^x) = x \log a,$$

जहाँ a धनात्मक माना गया है, जिससे

$$y = exp.(x \log a) = e^{x \log a}.$$

अब हम z^u के वास्तविक तथा काल्पनिक अंश ज्ञात करेंगे।

मान लें $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r \neq 0,$

तथा $u = a + ib$.

तब (1) से $z^u = e^{u \operatorname{Log} z}$

$$= e^{(a+ib) \operatorname{Log} \{ r (\cos\theta + i \sin\theta) \}}$$

$$= e^{(a+ib) [\log r + i (\theta + 2n\pi)]}$$

$$= e^{(a \log r - b (\theta + 2n\pi)] + i [b \log r + a (\theta + 2n\pi)]}$$

$$= e^{[a \log r - b (\theta + 2n\pi)]} \times e^{i [b \log r + a (\theta + 2n\pi)]}$$

$$= e^{[a \log r]} \times e^{[-b (\theta + 2n\pi)]} \times [\cos \{ b \log r + a (\theta + 2n\pi) \} + i \sin \{ b \log r + a (\theta + 2n\pi) \}]$$

$$= r^a . e^{-b (\theta + 2n\pi)} \times [\cos \{ b \log r + a (\theta + 2n\pi) \} + i \sin \{ b \log r + a (\theta + 2n\pi) \}] \quad \ldots\ldots(2)$$

इससे z^u के वास्तविक तथा काल्पनिक अंश सुगमता से पृथक किये जा सकते हैं।

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि z^u बहुमानीय अथवा असंख्य मानीय फलन है, यदि $b \neq 0$ तथा a परिमेय न हो।

जब $b = 0$, तथा $u = a = p/q$, तब z^u के केवल q मान होते हैं।

z^u के मुख्य मान की परिभाषा हम

$$e^{u \log z}$$

से देते हैं। अतएव (2) से z^u का मुख्य मान

$$= r^a \, e^{-b\theta} [\cos (b \log r + a\theta) + i \sin (b \log r + a\theta)]$$

यदि $-\pi < \theta < \pi$ हो।

उदाहरण १। यदि $i^{i^{i^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ (...... अनन्त तक) $= A + iB$.

तो सिद्ध करो कि $\tan\left(\frac{\pi A}{2}\right) = \frac{B}{A}$, तथा $A^2+B^2=e^{-\pi B}$.

[इलाहाबाद, १९५२]

क्योंकि $i^{i^{i^{\cdots\cdots}}} = A+iB$, अत:

$$i^{A+iB} = A+iB.$$

लघुगुणक का मुख्य मान लेने पर

$$(A+iB)\log i = \log(A+iB),$$

अथवा $(A+iB)\log\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \log(A+iB)$,

या $\quad (A+iB)\log e^{i\pi/2} = \log(A^2+B^2)^{\frac{1}{2}}+i\tan^{-1}\frac{B}{A}$,

या $\quad (A+iB)\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \log(A^2+B^2)^{\frac{1}{2}}+i\tan^{-1}\frac{B}{A}$.

अब वास्तविक तथा काल्पनिक अंशों को बराबर करने पर

$$-B\frac{\pi}{2} = \tfrac{1}{2}\log(A^2+B^2), \text{ तथा } \frac{A\pi}{2} = \tan^{-1}\frac{B}{A}.$$

जिससे $A^2+B^2 = e^{-B\pi}$, $\quad \tan\left(\frac{A\pi}{2}\right) = \frac{B}{A}$.

उदाहरण २ । यदि $(A+iB)^{u+iv}$ का मुख्य मान पूर्णतयः वास्तविक या पूर्णतयः काल्पनिक हो, तो

$$\frac{v}{2}\log(A^2+B^2)+u\tan^{-1}\frac{B}{A}$$

के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध ज्ञात करो ।

[यू० पी० सिविल सर्विस, १९४३]

अब $(A+iB)^{u+iv} = e^{(u+iv)\log(A+iB)}$

$$= e^{(u+iv)\left[\log\sqrt{(A^2+B^2)}+i\tan^{-1}\frac{B}{A}\right]}$$

$$= e^{\left[u/2\log(A^2+B^2)-v\tan^{-1}\frac{B}{A}\right]}$$

$$\times e^{i\left[v/2\log(A^2+B^2)+u\tan^{-1}\frac{B}{A}\right]}.$$

$$= K(\cos\phi+i\sin\phi), \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

जहाँ $K = e^{\left[u/2\log(A^2+B^2)-v\tan^{-1}\frac{B}{A}\right]}, \qquad \ldots\ldots (2)$

तथा $\phi = \left[\frac{v}{2}\log(A^2+B^2)+u\tan^{-1}\frac{B}{A}\right] \ldots\ldots\ldots (3)$

अब $(A+iB)^{u+iv}$ का मान, अथवा व्यंजक (1) पूर्णतयः वास्तविक तब होगा जब कि $\sin\phi=0$, अर्थात् जब ϕ कोण $\pi/2$ का एक सम अपवर्त्य होगा। इसी प्रकार (1) पूर्णतयः काल्पनिक तब होगा जब कि $\cos\phi=0$, अर्थात् जब कि ϕ कोण $\pi/2$ का विषम अपवर्त्य होगा।

उदाहरण २। सिद्ध करो कि $\text{Log}_i i$ बहुमानीय है।

हमें विदित है कि

$$\log_a x = \log_e x \times \log_a e = \log_e x/\log_e a$$
$$= \log x/\log a$$

अतः $\text{Log}_i i = \frac{\text{Log}\, i}{\text{Log}\, i} = \frac{i(4n+1)\pi/2}{i(4m+1)\pi/2}$

$$= \frac{4n+1}{4m+1}.$$

इससे प्रकट है कि $\text{Log}_i i$ बहुमानीय है।

उदाहरण ३। यदि $A^{u+iv} = (x+iy)^{a+ib}$, तो सिद्ध करो
$u=\frac{1}{2}a \log_A (x^2+y^2)-b \tan^{-1} (y/x) \log_A e,$

एवं $\log_A (x^2+y^2)=2 \left(\frac{ua+vb}{a^2+b^2}\right),$

जहाँ केवल मुख्य मान ही लिये गये हैं। [भारतीय सिविल सर्विस, १९३४]

दोनों पक्षों का लघुगुणक आधार e पर लेने से हमें प्राप्त है
$(u+iv) \log A= (a+ib) \log (x+iy)$

$$= (a+ib) \left[\tfrac{1}{2} \log (x^2+y^2)+i \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right],$$

केवल मुख्य मान लेने पर,
$(u+iv) \log A = [\frac{1}{2} a \log (x^2+y^2)-b \tan^{-1}(y/x)]$
$+i [\frac{1}{2}b \log (x^2+y^2)+a \tan^{-1} (y/x)].$ ...... (1)

अब वास्तविक तथा काल्पनिक अंशों को बराबर करने पर
$u \log A=\frac{1}{2}a \log (x^2+y^2)-b \tan^{-1} (y/x)$ ...... (2)
तथा $v \log A =\frac{1}{2}b \log (x^2+y^2) +a \tan^{-1} (y/x)$ .... (3)

(2) से $u= \dfrac{\frac{1}{2} a \log (x^2+y^2)}{\log A} -b \dfrac{\tan^{-1} (y/x)}{\log A},$

$=\frac{1}{2}a \log (x^2+y^2) \log_A e-b \tan^{-1} (y/x) \log_A e,$
$=\frac{1}{2}a \log_A (x^2+y^2)-b \tan^{-1} (y/x) \log_A e.$ ...... (4)

अब (3) से $v=\frac{1}{2}b \dfrac{\log (x^2+y^2)}{\log A}+\dfrac{a \tan^{-1} (y/x)}{\log A}$

$=\frac{1}{2}b \log_A (x^2+y^2)+a \tan^{-1} (y/x) \log_A e$..(5

अब (4) को a से तथा (5) को b से गुणा करके जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है

$$ua+vb=\tfrac{1}{2} (a^2+b^2) \log_A (x^2+y^2),$$

अथवा $\log_A (x^2+y^2)=2\left(\dfrac{ua+vb}{a^2+b^2}\right).$

उदाहरण

1. निम्नलिखित के व्यापक एवं मुख्य मान ज्ञात करो

(i) $\log i$, (ii) $\log 1$, (iii) $i \log i$.

2. सिद्ध करो

(i) $i^{-\pi} = \cos [\frac{1}{2}(4n-1)\pi^2]$,

(ii) $(1-i)^i = e^{2n\pi+\pi/4}\{\cos(\frac{1}{2}\log 2) + i\sin(\frac{1}{2}\log 2)\}$.

३. निम्न के मान निकालो

i^i तथा $(1+i)^i$. [भारतीय सिविल सर्विस, १९३५]

4. $\log\log(x+iy)$ को $A+iB$ के रूप में व्यक्त करो ।

[इलाहाबाद, १९४३]

5. सिद्ध करो

$$\tan\left[i\log\frac{A-iB}{A+iB}\right] = \frac{2AB}{A^2-B^2}.$$

[यू० पी० सिविल सर्विस, १९४९]

6. निम्न को $A+iB$ के रूप में व्यक्त करो

(i) $\log(-3+4i)$,

(ii) $\log\dfrac{1}{1-e^{i\theta}}$. [बनारस, १९५०]

7. यदि $i^{A+iB} = A+iB$, तो सिद्ध करो

$$A^2+B^2 = e^{-(4n+1)\pi B}.$$ [बनारस, १९४३]

8. यदि $\log\sin(\theta+i\phi) = A+iB$,
तो सिद्ध करो कि

$$2\cos 2\theta = e^{2\phi} + e^{-2\phi} - 4e^{2A},$$

तथा $\cos(\theta - B) = e^{2\phi}\cos(\theta + B)$.

[यू० पी० सिविल सर्विस, १९४६, इलाहाबाद, १९४७]

9. यदि $\tan\log(x+iy) = a+ib$, जहाँ $a^2+b^2 \neq 1$,

तो सिद्ध करो कि

$$\tan\log(x^2+y^2) = 2a/(1-a^2-b^2).$$

10. निम्न के मान निकालो

$$\text{Log}\, i/(1+i),\ \text{Log}\,(1+i) + \text{Log}\,(1-i).$$

७.०५ व्याप्तिकृत प्रतिलोम वृत्तुल एवं अतिपरवलयिक फलन—अध्याय १ में हम देख चुके हैं कि वास्तविक राशियों के प्रतिलोम फलन बहुमानीय होते हैं। इसी प्रकार मिश्र काल्पनिक राशियों के प्रतिलोम फलन भी बहुमानीय होते हैं। फलन $\sin^{-1}z$ की परिभाषा हम θ के किसी एक मान से देते हैं, जो समीकरण

$$z = \sin\theta \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

को सन्तुष्ट करता है। अन्य प्रतिलोम फलनों की परिभाषा हम इसी प्रकार देते हैं। अतः

$$\text{Sin}^{-1}z = n\pi + (-1)^n \sin^{-1}z$$

$$\text{Cos}^{-1}z = 2n\pi \pm \cos^{-1}z$$

तथा $$\text{Tan}^{-1}z = n\pi + \tan^{-1}z$$

जहाँ $\text{Sin}^{-1}z$, $\text{Cos}^{-1}z$ तथा $\text{Tan}^{-1}z$ से हमारा तात्पर्य $\sin^{-1}z$, $\cos^{-1}z$ तथा $\tan^{-1}z$ के व्यापक मान से है। इनका मुख्य मान वह छोटे से छोटा धनात्मक या ऋणात्मक मान है जो समीकरण $\sin\theta = z$, $\cos\theta = z$ तथा $\tan\theta = z$ को संतुष्ट करता है जैसा कि ऊपर बताया गया है। इसी प्रकार

$$\text{Sin}h^{-1}z = n\pi i + (-1)^n \sin h^{-1}z,$$

$$\text{Cos}h^{-1}z = 2n\pi i \pm \cos h^{-1}z,$$

$$\text{Tan}h^{-1}z = n\pi i + \tan h^{-1}z.$$

७.०६ प्रतिलोम अतिपरवलयिक फलनों को लघुगुणकीय फलनों के रूप में व्यक्त करना तथा उनका व्यापक मान ज्ञात करना—

(i) मान लें कि $\sinh^{-1}z=x.$

तब $z=\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),$

जिससे $e^{2x}-2ze^x-1=0.$

इसे e^x में वर्गात्मक मान कर हल करने पर

$$e^x=\tfrac{1}{2}[2z\pm\sqrt{(4z^2+4)}]$$
$$=z\pm\sqrt{(z^2+1)}.$$

अत: $x=2n\pi i+\log\{z\pm\sqrt{(z^2+1)}\}.$ ...... (1)

अब $z-\sqrt{(z^2+1)}=-1/[z+\sqrt{(z^2+1)}]$ ...... (2)

तथा $\text{Log}(-1)=\log[\cos(2m+1)\pi+i\sin(2m+1)\pi]$

$$=i(2m+1)\pi$$

अतएव (1) से

$$x=2n\pi i+\log(z+\sqrt{(z^2+1)}], \quad .... (3)$$

या $x=2n\pi i+\log[z-\sqrt{(z^2+1)}]$

$$=2n\pi i+\log(-1)-\log[z+\sqrt{(z^2+1)}]$$
$$=2n\pi i+(2m+1)\pi i-\log[z+\sqrt{(z^2+1)}] \text{ (2) से}$$
$$=(2p+1)\pi i+(-1)\log[z+\sqrt{(z^2+1)}] \quad ..(4)$$

जहाँ $p=n+m.$

अब (3) और (4) को एक साथ रखने पर

$$x=r\pi i+(-1)^r\log[z+\sqrt{(z^2+1)}] \quad ......(5)$$

जहाँ r एक पूर्ण संख्या है। अत: (5) $\sinh^{-1}z$ का व्यापक मान है। मुख्य मान निकालने के लिए $r=0$ रखने पर,

$$\sinh^{-1}z=\log[z+\sqrt{(z^2+1)}].$$

(ii) इस विधि से हम देख सकते हैं कि $\cosh^{-1}z$ के व्यापक तथा मुख्य मान क्रमशः हैं

$$2n\pi i \pm \log\,[z+\sqrt{(z^2-1)}],$$

एवं $$\log\,[z+\sqrt{(z^2-1)}].$$

(iii) $\tanh^{-1}z$ का व्यापक मान ज्ञात करने के लिए, मान लें कि

$$\tanh^{-1}z = x$$

तव $$z = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

अतएव $e^{2x} = \dfrac{1+z}{1-z}$,

जिससे $2x = 2n\,\pi i + \log\left\{\dfrac{1+z}{1-z}\right\}$

या $$x = n\pi i + \tfrac{1}{2}\log\,[(1+z)/(1-z)].$$

यह $\tanh^{-1}z$ का व्यापक मान है। मुख्य मान ज्ञात करने के लिए $n=0$, रखा तो

$$\tanh^{-1}z = \tfrac{1}{2}\log\,[(1+z)/(1-z)].$$

साधारणतय: $\sinh^{-1}z$, $\cosh^{-1}z$, $\tanh^{-1}z$ आदि से हमारा आशय उनके मुख्य मान से होता है।

७.०७ प्रतिलोम वृत्तुल एवं अतिपरवलयिक फलनों में सम्बन्ध—यदि $z = \sinh x$

तव $$z = \frac{\sin(ix)}{i}$$

अतः $$iz = \sin(ix)$$

जिससे $$x = \frac{1}{i}\sin^{-1}(iz),$$

$\therefore\ \sinh^{-1}z = \frac{1}{i}\sin^{-1}(iz).$

इसी प्रकार $\cosh^{-1}z = \frac{1}{i}\cos^{-1}z.$

तथा $\tanh^{-1}z = \frac{1}{i}\ \tan^{-1}(iz).$

उदाहरण १। सिद्ध करो कि

$$\sin^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

का एक मान है

$$\cos^{-1}\sqrt{(\sin\theta)} + i\log\{\sqrt{(\sin\theta)} + \sqrt{(1+\sin\theta)}\}.$$

[इलाहाबाद, १९४५]

मान लें $\sin^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta) = A + iB,$

तब $\cos\theta + i\sin\theta = \sin(A+iB)$

$= \sin A\cosh B + i\cos A\sinh B.$

अतएव $\sin A\cosh B = \cos\theta,$ .... (1)

तथा $\cos A\sinh B = \sin\theta.$ .... (2)

अब (1) और (2) के वर्गों का योग करने पर

$\sin^2A\cosh^2B + \cos^2A\sinh^2B = 1$

या $\sin^2A(1+\sinh^2B) + \cos^2A\sinh^2B = 1$

या $\sin^2A + \sinh^2B = 1$

या $1 - \sin^2A = \sinh^2B$

या $\cos^2A = \sinh^2B.$

वर्गमूल का धनात्मक मान लेने पर

$\sinh B = \cos A.$

अतः (2) में $\sinh$ B का मान रखने पर

$\cos^2A = \sin\theta.$

$\therefore\ \cos A = \sqrt{(\sin\theta)},$

$\therefore\ A = \cos^{-1}\sqrt{(\sin\theta)}.$

पुनः (2) में $\cos A$ का मान रखने पर

$$\sinh^2 B = \sin\theta$$

जिससे $$e^B - e^{-B} = 2\sqrt{(\sin\theta)},$$

या $$e^{2B} - 2\sqrt{(\sin\theta)}\; e^B - 1 = 0.$$

इसके हल करने पर हमें e^B का मान प्राप्त होता है जो निम्न है

$$e^B = \sqrt{(\sin\theta)} \pm \sqrt{(\sin\theta + 1)}.$$

अब यदि धनात्मक मान हों लें तो

$$B = \log\ [\sqrt{(\sin\theta)} + \sqrt{(1 + \sin\theta)}].$$

अब A तथा B का मान रखने पर $\sin^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta)$ का एक मान निम्न है

$$\cos^{-1}\sqrt{(\sin\theta)} + i\log\ [\sqrt{(\sin\theta)} + \sqrt{(1 + \sin\theta)}].$$

उदाहरण २। सिद्ध करो

$$\tanh^{-1} x = \sinh^{-1} \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)}}.$$

मान लें $\tanh^{-1} x = y$, तब $x = \tanh y$,

या $$\frac{\sinh y}{\cosh y} = x,$$

अथवा $$\frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y} = \frac{\sinh^2 y}{1 + \sinh^2 y} = x^2,$$

या $$\sinh^2 y = \frac{x^2}{1 - x^2}.$$

वर्गमूल लेने पर, $$\sinh y = \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)}}.$$

अतः $$y = \tanh^{-1} x = \sinh^{-1} \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)}}.$$

उदाहरण ३ । सिद्ध करो कि

$$\sin^{-1}(i) = 2n\pi - i \log(\sqrt{2}-1).$$

मान लें $\sin^{-1}(i) = \theta$,

तब $\sin\theta = i$

एवं $\cos\theta = \sqrt{(1-i^2)} = \sqrt{2}$.

अब $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$,

$= \sqrt{2} - 1$.

अब लघुगुणक लेने पर

$$i\theta = 2n\pi i + \log(\sqrt{2}-1),$$

या $\theta = 2n\pi + \frac{1}{i}\log(\sqrt{2}-1)$,

अथवा $\theta = 2n\pi - i\log(\sqrt{2}-1)$.

परन्तु $\theta = \sin^{-1}(i)$

अतः $\sin^{-1}(i) = 2n\pi - i\log(\sqrt{2}-1)$

अध्याय ७ पर उदाहरण

1. दिखाओ कि

(i) $e^{i\pi/2} = ie^{n\pi^3}$

(ii) $e^{n\pi i} = [\frac{1}{2}\log 3 + m\pi i]/[\log 3 + n\pi i]$,

(iii) $\pi^{-i} = e^{2n\pi}[\cos(-\log\pi) + i\sin(-\log\pi)]$,

(iv) $(-i)^{-i} = e^{\frac{1}{2}(4n-1)\pi}$,

(v) $(1)^{1+i} = e^{2n\pi}$.

2. सिद्ध करो कि

$$(1+i)^{1-i} \text{ तथा } (1-i)^{1+i}$$

के मुख्य मानों की निष्पत्ति है

$$\sin(\log 2) + i\cos(\log 2).$$

3. दिखाओ कि

$$\log \frac{\cos (x-iy)}{\cos (x+iy)} = 2i \tan^{-1} \{ \tan x \tanh y \}.$$

4. सिद्ध करो कि

$$\log \frac{\sin (x+iy)}{\sin (x-iy)} = 2i \tan^{-1} \{ \cot x \tanh y \}.$$

5. $\log (1+\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$ को $A+iB$ के रूप में व्यक्त करो।

6. $\log \dfrac{a+ib-c}{a+ib+c}$ के वास्तविक एवं काल्पनिक अंश ज्ञात करो।

7. यदि $\tan^{-1}(a+ib) = \sin^{-1}(x+iy)$, तो सिद्ध करो कि $(a^2+b^2) = (x^2+y^2)/\sqrt{(x^4+y^4+2x^2y^2-2x^2+2y^2+1)}$.

8. सिद्ध करो कि

$$\tan^{-1}(e^{ix}) = \frac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2} i \log \left\{ \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right\}.$$

9. यदि $u+iv = \log \dfrac{x-a+iy}{x+a+iy}$, जहाँ u, v, x, y वास्तविक हैं, तो दिखाओ कि (x,y) तल में $u=$ स्थिरांक, तथा $v=$ स्थिरांक क्रमशः दो वृत्त समुदायों के द्योतक हैं जो एक दूसरे को समकोण पर काटते हैं।

[भारतीय पुलिस, १९३७]

10. सिद्ध करो कि

$$(1+i \tan x)^{1+i \tan y} = (\sec x)^{\sec^2 y}.$$

[बनारस, १९३४]

11. निम्न को $A+i$B के रूप में व्यक्त करो

$$\log \log (\cos\theta + i \sin\theta).$$

12. A तथा B के मान ज्ञात करो, जब कि

$$\log (A+iB) = \frac{\pi}{6}(1+i)^3.$$

13. $\sinh^{-1}(x/a)$ को लघुगुणक के रूप में व्यक्त करो

[इलाहाबाद, १९४६]

14. $\cos^{-1}(\cos\theta + i\sin\theta)$ को $u+iv$ के रूप में व्यक्त करो।

15. सिद्ध करो कि

$$\text{(i)} \sin^{-1}(ix) = 2n\pi - i\log\{\sqrt{(1+x^2)} - x\}$$
$$= 2n\pi + i\log\{\sqrt{(1+x^2)} + x\},$$
$$\text{(ii)} \sin^{-1}a = \tfrac{1}{2}(4n+1)\pi - i\log\{(a^2-1)+a\}.$$

16. सिद्ध करो कि

$$\tan^{-1}\left\{\frac{\tan 2\theta + \tanh 2\phi}{\tan 2\theta - \tanh 2\phi}\right\} + \tan^{-1}\left\{\frac{\tan\theta - \tanh\phi}{\tan\theta + \tanh\phi}\right\}$$
$$= \tan^{-1}\{\cot\theta \coth\phi\}$$ [इलाहाबाद, १९२७]

17. यदि $\tan x = \tanh y$, तो दिखाओ कि

$$2\tan^{-1}(\sin 2x) = \tan^{-1}(\sinh 4y).$$

18. यदि $x+iy = \tan(u+iv)$, जहाँ x, y, u, v वास्तविक हैं, तो सिद्ध करो कि वक्र $u=$ स्थिरांक सम अक्षीय वृत्तों के समुदाय हैं जो $(0, \pm 1)$ से जाते हैं, तथा वक्र $v=$ स्थिरांक वृत्तों के एक अन्य समुदाय हैं जो पहले समुदाय को समकोण पर काटते हैं।

[बनारस, १९३९]

19. यदि $\cosh^{-1}y = \cosh^{-1}x + \cosh^{-1}(1/x)$, तथा y वास्तविक है, तो दिखाओ कि x या तो पूर्णतयः काल्पनिक है, अथवा $|x| = 1$.

[यू० पी० सिविल सर्विस, १९४८]

20. यदि $\tan\{\log(A+iB)\} = x+iy$, जहाँ $x^2+y^2 \neq 1$ तो सिद्ध करो कि

$$2x = \{1 - x^2 - y^2\}\tan\{\log(A^2+B^2)\}.$$

21. दिखाओ कि

$$\tan\{\theta - i\log\tan(\theta/2)\} = \frac{\sin^3\theta + i}{\cos\theta(1+\sin^2\theta)}.$$

22. सिद्ध करो कि

$$e^{i(2n+1)\pi/2} = (-1)^n i\, e^{-m\pi^2(2n+1)}.$$

अध्याय ८

मिश्र काल्पनिक फलनों का विस्तार तथा ग्रेगरी श्रेणीं

८.०१ मिश्र काल्पनिक राशियों के लिये लघुगुणकीय श्रेणी— यदि x वास्तविक हो, तो हमें विदित है कि

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \quad .. \ (1)$$

जहाँ $-1 < x \leqslant 1$.

हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि यदि z एक मिश्र काल्पनिक राशि हो, तो $\log(1+z)$ अथवा $\text{Log}(1+z)$ का मुख्य मान भी (1) की ही भांति होगा अर्थात्

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots, \quad .. \ (2)$$

जहाँ (i) z का संख्यात्मक मान, अर्थात $|z| < 1$,

तथा (ii) यदि $|z| = 1$, तो z का कोणांक π का विषम अपवर्त्य नहीं है।

क्योंकि हमें विदित है कि

$$\text{Log}(1+z) = 2n\pi i + \log(1+z),$$

इसलिए $\text{Log}(1+z) = 2n\pi i + z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots,$

इसी प्रकार $\text{Log}(1-z) = 2n\pi i - z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots.$

८.०२ ग्रेगरी श्रेणी— यदि $-\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$, तो $\tan\theta$ की घातों की श्रेणी में θ का विस्तार—

हमें विदित है कि

$$i\tan\theta = \frac{i\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}.$$

अब योगान्तरानुपात से

$$\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

अब (1) के दोनों पक्षों का लघुगुणक लेने पर

$$2i\theta = \log(1+i\tan\theta) - \log(1-i\tan\theta)$$

$$= i\tan\theta - \frac{(i\tan\theta)^2}{2} + \frac{(i\tan\theta)^3}{3} - \ldots\ldots$$

$$-\left\{-i\tan\theta - \frac{(i\tan\theta)^2}{2} - \frac{(i\tan\theta)^3}{3} - \ldots\ldots\right\}$$

$$= 2i\{\tan\theta - \tfrac{1}{3}\tan^3\theta + \tfrac{1}{5}\tan^5\theta - \ldots\ldots\}$$

या $\theta = \tan\theta - \frac{1}{3}\tan^3\theta + \frac{1}{5}\tan^5\theta - \ldots\ldots \quad (2)$

लघुगुणकीय विस्तार के लिए आवश्यक है कि

$$|i\tan\theta| = |i||\tan\theta| = |\tan\theta| < 1,$$

अर्थात् $-\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$, जहाँ θ से तात्पर्य हमारा उसके मुख्य मान से है अर्थात् $-\pi/4 \leqslant \theta$ का मुख्य मान $\leqslant \pi/4$.

श्रेणी (2) को **ग्रेगरी श्रेणी** कहते हैं।

अब यदि मान लें कि $\tan\theta = x$, जिससे $\theta = \tan^{-1}x$, तब (2) का निम्न रूप होगा

$$\tan^{-1}x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots\ldots, \quad \ldots\ldots (3)$$

जहाँ $-1 \leqslant x \leqslant 1$, तथा $\tan^{-1}x$ का मुख्य मान लिया गया है।

टिप्पणी १—यदि हम (1) के लघुगुणक का व्यापक मान लें तो

$$2i\theta + 2n\pi i = 2i\{\tan\theta - \tfrac{1}{3}\tan^3\theta + \tfrac{1}{5}\tan^5\theta - \ldots\},$$

जिससे $n\pi + \theta = \tan\theta - \frac{1}{3}\tan^3\theta + \frac{1}{5}\tan^5\theta - \ldots\ldots \quad (4)$

अब यदि θ का मान $-\pi/4$ तथा $\pi/4$ के बीच है, तो श्रेणी

$$\tan\theta - \{\tfrac{1}{3}\tan^3\theta - \tfrac{1}{5}\tan^5\theta + \ldots\ldots\}$$

का संख्यात्मक मान 1 से कम है।

क्योंकि π का मान ३ से बड़ा है, इसलिए यह तभी सम्भव है जब n शून्य हो।

टिप्पणी २—ग्रेगरी श्रेणी (3) x के मिश्र काल्पनिक होने पर भी सत्य है। परन्तु इसके लिए आवश्यक प्रतिबन्ध है कि $|x|<1$, तथा $\tan^{-1}x$ का वास्तविक अंश $-\pi/2$ तथा $\pi/2$ के मध्य हो।

टिप्पणी ३—क्योंकि $\tan\theta<1$, अतएव ग्रेगरी श्रेणी अभिसारी सिद्ध की जा सकती है।

८.०३ π के मान—ग्रेगरी श्रेणी की सहायता से अनेक रीतियों से π के मान प्राप्त किये जा सकते हैं। पहले मान लें कि $\theta=\pi/4$,

$$\frac{\pi}{4}=1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots. \ (1)$$

यह श्रेणी शीघ्र अभिसारी नहीं है अर्थात् धीरे धीरे अभिसारी बनती है। अतएव π का मान ज्ञात करने के लिए अधिक पदों को जोड़ना पड़ेगा। निम्न श्रेणियाँ इससे अधिक शीघ्र अभिसारी हैं।

(i) **ऑयलर श्रेणी**—

हमें प्राप्त है कि

$$\tan^{-1}\tfrac{1}{2}+\tan^{-1}\tfrac{1}{3}=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}$$

$$=\tan^{-1}1=\pi/4$$

अतएव $\dfrac{\pi}{4}=\tan^{-1}\tfrac{1}{2}+\tan^{-1}\tfrac{1}{3}$

ग्रेगरी श्रेणी से इनका विस्तार करने पर

$$\frac{\pi}{4}=\left\{\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{2}\right)^5-\ldots\right\}+\left\{\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5-\ldots\right\}$$

(ii) **मशिन श्रेणी**—

क्योंकि $$2\tan^{-1}\tfrac{1}{5}=\tan^{-1}\frac{2/5}{1-(1/5)^2}$$

$$=\tan^{-1}(5/12)$$

तथा $$4\tan^{-1}\tfrac{1}{5}=2\tan^{-1}\frac{5}{12}=\tan^{-1}\frac{10/12}{1-(5/12)^2}$$

$$=\tan^{-1}\frac{120}{119},$$

अब $$4 \tan^{-1} \tfrac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239}$$

$$= \tan^{-1} \frac{120}{119} - \tan^{-1} \frac{1}{239}$$

$$= \tan^{-1} 1 = \pi/4.$$

ग्रेगरी श्रेणी से हमें $\pi/4$ का विस्तार प्राप्त होता है

$$\therefore \pi/4 = 4 \left\{ \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{3} (\tfrac{1}{5})^3 + \tfrac{1}{5} (\tfrac{1}{5})^5 - \ldots\ldots \right\} - \left\{ \frac{1}{239} - \tfrac{1}{3} \left(\frac{1}{239}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots \right\}.$$

(iii) रदरफोर्ड श्रेणी--

क्योंकि $$\tan^{-1} \frac{1}{70} - \tan^{-1} \frac{1}{99} = \tan^{-1} \frac{\frac{1}{70} - \frac{1}{99}}{1 + \frac{1}{70} \cdot \frac{1}{99}}$$

$$= \tan^{-1} \frac{1}{239}.$$

इसलिये उपर्युक्त से

$$\frac{\pi}{4} = 4 \tan^{-1} \tfrac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239}$$

$$= 4 \tan^{-1} \tfrac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{70} + \tan^{-1} \frac{1}{99}$$

अतः $$\frac{\pi}{4} = 4 \left\{ \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{3} (\tfrac{1}{5})^3 + \ldots\ldots \right\} - \left\{ \frac{1}{70} - \tfrac{1}{3} \left(\frac{1}{70}\right)^3 + \ldots\ldots \right\} + \left\{ \frac{1}{99} - \tfrac{1}{3} \left(\frac{1}{99}\right)^3 + \ldots\ldots \right\}$$

(iv) डेज श्रेणी--

क्योंकि $$\tan^{-1} \tfrac{1}{2} + \tan^{-1} \tfrac{1}{5} = \tan^{-1} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \tan^{-1} \tfrac{7}{9},$$

$$\therefore \tan^{-1} \tfrac{1}{2} + \tan^{-1} \tfrac{1}{5} + \tan^{-1} \tfrac{1}{8} = \tan^{-1} \tfrac{7}{9} + \tan^{-1} \tfrac{1}{8}$$

$$= \tan^{-1} \frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{8}} = \tan^{-1} 1 = \pi/4$$

अतः $\pi/4=\{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3+\ldots\}+\{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}(\frac{1}{5})^3+\ldots\ldots\}+$
$\{\frac{1}{8}-\frac{1}{3}(\frac{1}{8})^3+\ldots\}$.

उदाहरण १। निम्न श्रेणी का अनन्त तक योग निकालो

$$\frac{17}{21}-\frac{713}{81.343}+\ldots\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\left\{\frac{2}{3}.9^{1-n}+7^{1-2n}\right\}+\ldots\ldots$$

[उत्तर प्रदेश संयुक्त सर्विस, १९५१; आगरा, १९४४]

यहाँ nth पद दो खंडों में विश्लिष्ट करके दिया हुआ है।

अस्तु nth पद $=\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\left\{\frac{2}{3}.\frac{1}{9^{n-1}}+\frac{1}{7^{2n-1}}\right\}$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\left\{\frac{2}{3^{2n-1}}+\frac{1}{7^{2n-1}}\right\}$$

जिसमें $n=1,2,3,\ldots$ रखने पर श्रेणी के विभिन्न पद प्राप्त होते हैं।

पहला पद $=\dfrac{17}{21}=\dfrac{(-1)^2}{1}\{\frac{2}{3}+\frac{1}{7}\}=\{\frac{2}{3}+\frac{1}{7}\}$,

द्वितीय पद $=\dfrac{713}{81.343}=\dfrac{(-1)^3}{3}\left\{\dfrac{2}{3^3}+\dfrac{1}{7^3}\right\}$

$$=-\frac{1}{3}\left\{\frac{2}{3^3}+\frac{1}{7^3}\right\},$$

....

अतः श्रेणी का योग

$$=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3^3}+\frac{1}{7^3}\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$=2\ [\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(\frac{1}{3})^3+\ldots]+[\frac{1}{7}-\frac{1}{3}(\frac{1}{7})^3+\ldots]$

$=2\ \tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$

$=\tan^{-1}\{\frac{2}{3}/1-\frac{1}{9}\}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$

$=\tan^{-1}3/4+\tan^{-1}\frac{1}{7}$

$=\tan^{-1}\dfrac{3/4+1/7}{1-3/4.1/7}=\tan^{-1}1=\pi/4.$

उदाहरण २। यदि $x < (\sqrt{2}-1)$, तो सिद्ध करो कि

$$2\left[x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5 \quad -\ldots\ldots\infty\right] = \frac{2x}{1-x^2} -$$

$$\tfrac{1}{3}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^5-\ldots\ldots\ldots\ldots$$

[आगरा, १९५०]

दाहिनी श्रेणी का योग $\tan^{-1} \dfrac{2x}{1-x^2}$ होगा, यदि

$\dfrac{2x}{1-x^2}$ का संख्यात्मक मान <1 है,

अर्थात् $\qquad -1+2x+x^2<0,$

अर्थात् $\qquad 1+2x+x^2<2,$

अर्थात् $\qquad (1+x)^2<2,$

अर्थात् $\qquad x<(\sqrt{2}-1).$

यह प्रतिबन्ध दिया हुआ है। इससे $x<1$.

अतएव दाहिनी श्रेणी $= \tan^{-1} \dfrac{2x}{1-x^2} = 2\tan^{-1}x$

$$=2\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ \ldots\ldots\right]$$

उदाहरण

1. यदि $|x|<1$, तो सिद्ध करो कि

$$\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots\ldots$$

2. सिद्ध करो

$$\frac{\pi}{4} = \left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{7}\right) - \tfrac{1}{3}\left(\frac{2}{3^3}+\frac{1}{7^3}\right)+\tfrac{1}{5}\left(\frac{2}{3^5}+\frac{1}{7^5}\right)-\ldots\ldots$$

[कलकत्ता; १९४७; आगरा, १९४१]

3. यदि $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$, तो दिखाओ कि

$$\theta = \tfrac{1}{2}\pi - \cot\theta + \tfrac{1}{3}\cot^3\theta - \tfrac{1}{5}\cot^5\theta + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4. दिखाओ कि

$$\frac{\pi}{12} = \left(1 - \frac{1}{3^{1/2}}\right) - \tfrac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3^{3/2}}\right) + \tfrac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{3^{5/2}}\right) - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

[कलकत्ता, १९४९]

5. योग करो

$$\tan^2\frac{\theta}{2} - \tfrac{1}{3}\tan^6\frac{\theta}{2} + \tfrac{1}{5}\tan^{10}\frac{\theta}{2} - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

[बनारस, १९५१]

6 सिद्ध करो

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left\{\frac{4}{5^{2n-1}} - \frac{1}{239^{2n-1}}\right\} = \frac{\pi}{4}.$$

[बनारस, १९५०]

८.०४ x की श्रेणी में $e^{ax}\cos bx$ तथा $e^{ax}\sin bx$ का विस्तार—हमें प्राप्त है

$$e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) = e^{ax+ibx}.$$

$$e^{x(a+ib)} = 1 + x(a+ib) + \frac{1}{2!}x^2(a+ib)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

इसमें $a+ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ रखने पर

$$e^{x(a+ib)} = 1 + xr(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{2!}x^2r^2(\cos\theta + i\sin\theta)^2 + \ldots\ldots\ldots$$

या $e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)=1+xr(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$+\frac{1}{2!}x^2r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)+\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{n!}x^nr^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)+\ldots\ldots$$

अब वास्तविक तथा काल्पनिक अंशों को बराबर करने पर

$$e^{ax}\cos bx=1+xr\cos\theta+\frac{1}{2!}x^2r^2\cos 2\theta+\ldots$$

$$+\frac{1}{n!}x^nr^n\cos n\theta+\ldots\ldots,$$

तथा $e^{ax}\sin bx=xr\sin\theta+\frac{1}{2!}x^2r^2\sin 2\theta+\ldots\ldots$

$$+\frac{1}{n!}x^nr^n\sin n\theta+\ldots\ldots$$

जहाँ $r=\sqrt{(a^2+b^2)}$, तथा $\theta=\tan^{-1}b/a$

अतः $e^{ax}\cos bx=1+x(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\cos\left\{\tan^{-1}\frac{b}{a}\right\}$

$$+\frac{1}{2!}x^2(a^2+b^2)\cos\left\{2\tan^{-1}\frac{b}{a}\right\}$$

$$+\ldots\ldots+\frac{1}{n!}x^n(a^2+b^2)^{n/2}\cos\left\{n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right\}+\ldots\ldots$$

एवं $e^{ax}\sin bx=x(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\sin\left\{\tan^{-1}\frac{b}{a}\right\}$

$$+\frac{1}{2!}x^2(a^2+b^2)\sin\left\{2\tan^{-1}\frac{b}{a}\right\}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{n!}x^n(a^2+b^2)^{n/2}\sin\left\{n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right\}+\ldots\ldots$$

८.०५ यदि $\tan x = n \tan y$, तो y को श्रेणी में x का विस्तार करना—

दत्त समीकरण में $\tan x$ तथा $\tan y$ के घातीय मान रखने पर

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = n \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{e^{iy} + e^{-iy}},$$

या $$\frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1} = n \frac{e^{2iy} - 1}{e^{2iy} + 1},$$

अब योगान्तरानुपात से

$$e^{2ix} = \frac{(1+n)\, e^{2iy} + (1-n)}{(1-n)\, e^{2iy} + (1+n)},$$

$$= e^{2iy} \frac{1 + \frac{1-n}{1+n} e^{-2iy}}{1 + \frac{1-n}{1+n} e^{2iy}},$$

$$= e^{2iy} \frac{1 + me^{-2iy}}{1 + me^{2iy}}$$

$\frac{1-n}{1+n}$ के स्थान पर m रखने पर।

अब दोनों पक्षों के मुख्य लघुगणक लेने पर

$$2ix = 2iy + \log(1 + me^{-2iy}) - \log(1 + me^{2iy})$$

$$= 2iy + \left[me^{-2iy} - \frac{m^2}{2} e^{-4iy} + \frac{m^3}{3} e^{-6iy} - \ldots\right]$$

$$- \left[m\, e^{2iy} - \frac{m^2}{2} e^{4iy} + \frac{m^3}{3} e^{6iy} - \ldots\ldots\right]$$

$$= 2iy - m(e^{2iy} - e^{-2iy}) + \frac{m^2}{2}(e^{4iy} - e^{-4iy}) - \ldots\ldots$$

अतः $x = y - m \sin 2y + \frac{m^2}{2} \sin 4y - \frac{m^3}{3} \sin 6y + \ldots\ldots$

इसी प्रकार y का x की श्रेणी में विस्तार कर सकते हैं।

८.०६ यदि $\sin x = n \sin(x+\alpha)$, तो n की श्रेणी में x का विस्तार—
दत्त समीकरण में $\sin x$ तथा $\sin(x+\alpha)$ के घातीय मान रखने पर

$$e^{xi} - e^{-xi} = n\ \{e^{i(x+\alpha)} - e^{-i(x+\alpha)}\}$$

अब e^{-ix} से दोनों पक्षों को भाग देने पर

$$e^{2ix} - 1 = n\ \{e^{i(2x+\alpha)} - e^{-i\alpha}\}$$

अथवा $$e^{2ix}(1 - ne^{i\alpha}) = (1 - ne^{-i\alpha}),$$

जिससे $$e^{2ix} = \frac{1 - ne^{-i\alpha}}{1 - ne^{i\alpha}}.$$

अब दोनों ओर का मुख्य लघु गुणक लेने पर

$$2ix = \log(1 - ne^{-i\alpha}) - \log(1 - ne^{i\alpha})$$

$$= \left[-ne^{-i\alpha} - \frac{n^2}{2}e^{-2i\alpha} - \frac{n^3}{3}e^{-3i\alpha} - \ldots\ldots\right]$$

$$- \left[-ne^{i\alpha} - \frac{n^2}{2}e^{2i\alpha} - \frac{n^3}{3}e^{3i\alpha} - \ldots\ldots\right]$$

$$= n(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) + \frac{n^2}{2}(e^{2i\alpha} - e^{-2i\alpha}) + \frac{n^3}{3}(e^{3i\alpha} - e^{-3i\alpha}) + \ldots\ldots$$

$$= n.2i\sin\alpha + \frac{n^2}{2}.2i\sin 2\alpha + \frac{n^3}{3}2i\sin 3\alpha + \ldots$$

$$\therefore\ x = n\sin\alpha + \tfrac{1}{2}n^2\sin 2\alpha + \tfrac{1}{3}n^3\sin 3\alpha + \ldots\ldots.$$

उदाहरण । $e^{a\cos\phi}.\cos(\theta + a\sin\phi)$ का विस्तार करो ।

[आगरा, १९५१]

मान लें $$e^{a\cos\phi}.\cos(\theta+a\sin\phi) = C,$$

तथा $$e^{a\cos\phi}.\sin(\theta+a\sin\phi) = S.$$

$$\therefore\ C+iS=e^{a\cos\phi}.e^{i(\theta+a\sin\phi)}$$

$$= e^{a(\cos\phi+i\sin\phi)}\times e^{i\theta}$$

$$= e^{i\theta}.e^{ae^{i\phi}}.$$

अब घातीय विस्तार करने पर,

$$e^{i\theta}.e^{ae^{i\phi}} = e^{i\theta}\left[1+ae^{i\phi}+\frac{a^2e^{2i\phi}}{2!}+\ldots\ldots+\frac{a^n e^{in\phi}}{n!}+\ldots\ldots\ldots\right].$$

$$= e^{i\theta}+ae^{i(\theta+\phi)}+\frac{a^2}{2!}e^{i(\theta+2\phi)}+\ldots\ldots+\frac{a^n}{n!}e^{i(\theta+n\phi)}+\ldots\ldots$$

$$= (\cos\theta+i\sin\theta)+a\{\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)\}$$
$$+\frac{a^2}{2!}\left\{\cos(\theta+2\phi)+i\sin(\theta+2\phi)\right\}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{a^n}{n!}\left\{\cos(\theta+n\phi)+i\sin(\theta+n\phi)\right\}+\ldots\ldots$$

दोनों ओर के वास्तविक अंशों को बराबर करने पर

$$e^{a\cos\phi}.\cos(\theta+a\sin\phi)=\cos\theta+a\cos(\theta+\phi)$$
$$+\frac{a^2}{2!}\cos(\theta+2\phi)+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{a^n}{n!}\cos(\theta+n\phi)+\ldots\ldots$$

उदाहरण

1. निम्न के विस्तार में x^n का गुणांक ज्ञात करो

$$e^{ax} \sin bx + e^{bx} \sin ax.$$

2. सिद्ध करो

$$e^x \cos x = \sum_0^\infty \left\{ \frac{(x\sqrt{2})^n}{n!} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right\}.$$

मैकलॉरिन के प्रमेय के द्वारा विस्तार करके अपने परिणाम की पुष्टि करो।

3. निम्न का विस्तार करो

$$e^{x \cos \theta} . \cos (x \sin\theta), \; e^{x \cos \theta} . \sin (x \sin \theta).$$

4. यदि $(1+x) \tan\theta = (1-x) \tan\phi$, तथा $|x| < 1$, तो सिद्ध करो

$$\theta = n\pi + \phi - x \sin 2\phi + \tfrac{1}{2}x^2 \sin 4\phi - \tfrac{1}{3}x^3 \sin 6\phi + \ldots\ldots$$

5. समीकरण $\sin\theta - x \cos(\theta+\phi) = 0$ से θ का विस्तार x के घातों में करो।

अध्याय ८ पर उदाहरण

सिद्ध करो

1. $\pi = 2\sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \ldots\ldots\ldots\right)$

[कलकत्ता, १९४३]

2. $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \ldots\ldots\ldots$

3. $\tan^{-1} \frac{2x \cos \theta}{1-x^2}$ का x के आरोह घातों में विस्तार करो।

4. यदि $\tan \theta = x + \tan \phi$, तो सिद्ध करो

$$\theta = \phi + x \cos^2\phi - \tfrac{1}{2}x^2 \cos^2\phi \sin 2\phi + \tfrac{1}{3}x^3 \cos^3\phi \cos 3\phi + \tfrac{1}{4}x^4 \cos^4\phi \sin 4\phi + \ldots\ldots\ldots$$

[आगरा, १९४१]

5. यदि y का संख्यात्मक मान 1 से कम है, तो दिखाओ कि

$$\log \sqrt{(1-2y \cos\theta + y^2)} = -\{y \cos\theta + \tfrac{1}{2} y^2 \cos 2\theta + \tfrac{1}{3}y^3 \cos 3\theta + \ldots\ldots\ldots\}.$$

[इलाहाबाद, १९२४]

6. सिद्ध करो

$$(\tan^{-1} x)^2 = x^2 - \tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{3})x^4 + \tfrac{1}{3}(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5})x^6 - \ldots\ldots,$$

जहाँ $-1 < x < 1$ [कलकत्ता, १९३९]

7. यदि $\pi/4 > \phi > -\pi/4$, तो निम्न का योग निकालो

$$\tan\phi \cos\theta - \tfrac{1}{3}\tan^3\phi \cos 3\theta + \tfrac{1}{5}\tan^5\phi \cos 5\theta - \ldots\ldots.$$

8. यदि $\tan \dfrac{\theta}{2} = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{1/2} \tan \dfrac{\phi}{2}$, तो सिद्ध करो

$$\theta = \phi + 2p \sin\phi + \frac{2p^2}{1}\sin 2\phi + \frac{2p^3}{3}\sin 3\phi + \ldots\ldots,$$

जहाँ $p = \dfrac{x}{2} + \left(\dfrac{x}{2}\right)^3 + 2\left(\dfrac{x}{2}\right)^5 + 5\left(\dfrac{x}{2}\right)^7 + \ldots\ldots\ldots$

[यू० पी० सिविल सर्विस, १९४२]

9. सिद्ध करो

$$\frac{\tan^{-1} x}{x} + \frac{\tan^{-1} y}{y} + \frac{\tan^{-1} z}{z} = 3\left\{1 - \tfrac{1}{7} + \frac{1}{13} - \frac{1}{19} + \frac{1}{25} - \ldots\ldots\right\}$$

जहां x, y, z इकाई के तीन घनमूल हैं।

[संकेत—यदि $1, \omega, \omega^2$ इकाई के तीन घनमूल हों, तो $1+\omega+\omega^2=0$, आदि।]

10. यदि $x < \pi/4$, तो सिद्ध करो

$$\log(\sec x) = \tfrac{1}{2}\tan^2 x - \tfrac{1}{4}\tan^4 x + \tfrac{1}{6}\tan^6 x - \ldots\ldots.$$

11. निम्न का विस्तार θ के अपवर्त्यों के sines तथा cosines की श्रेणी में करो

$$\log\left\{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$

12. सिद्ध करो कि

$$\log (1+i \tan\phi)=\log (\sec\phi)+i (n\pi+\phi),$$

तथा इससे ϕ एवं $\log (\cos\phi)$ के विस्तार $\tan\phi$ की श्रेणी में प्राप्त करो ।

13. यदि $\tan x=\dfrac{n \sin \phi}{(1-n)\cos\phi}$, $n<1$, तो x का विस्तार करो ।

14. निम्न श्रेणी का योग निकालो

$$2 \tan\theta-\tfrac{4}{3} \tan^3\theta+\tfrac{6}{5} \tan^5\theta-\tfrac{8}{7} \tan^7\theta+ \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

जहां $-\pi/4<\theta<\pi/4.$ [कलकत्ता, १९४२]

15. $\tan^{-1} (\cos \theta+i \sin \theta)$ को $A+iB$ के रूप में व्यक्त करो, एवं $\tan^{-1} (e^{i\theta})$ का ग्रेगरी श्रेणी में विस्तार करके सिद्ध करो कि

(i) $\cos \theta-\frac{1}{3} \cos 3 \theta+\frac{1}{5} \cos 5\theta- \ldots\ldots=\pm \pi/4,$

[बनारस, १९४८]

(ii) $\sin \theta-\frac{1}{3}\sin 3\theta+\frac{1}{5} \sin 5\theta- \ldots\ldots\ldots=$

$$\tfrac{1}{2} \log\left\{ \pm\tan \left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right\}.$$

16. $\log \tan (\pi/4+\theta/2)$ का θ के आरोह् अपवर्त्यों के sines की श्रेणी में विस्तार करो ।

17. यदि $\sin \theta=x \cos (\theta+\alpha)$, तो θ का x के आरोह् घातों में विस्तार करो ।

18. सिद्ध करो

$$\log \cos\theta=-\log 2+\cos 2\theta-\tfrac{1}{2} \cos 4\theta+\tfrac{1}{3} \cos 6\theta- \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ अनंत तक}$$

जहाँ θ ऐसा कोण है कि $\cos \theta$ घनात्मक है ।

19. यदि $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$ तो सिद्ध करो कि

(i) $\log \frac{a}{b} = (\cos 2B - \cos 2A) + \frac{1}{2}(\cos 4B - \cos 4A)$

$+ \frac{1}{3}(\cos 6B - \cos 6A) + \ldots\ldots\ldots,$

तथा (ii) $B - A = 2m\pi + (\sin 2A - \sin 2B) +$

$\frac{1}{2}(\sin 4B - \sin 4A) + \ldots\ldots\ldots,$

जहाँ m एक धनात्मक संख्या है ।

अध्याय ९

त्रिकोणमितीय श्रेणियों का योग

९.०१ गत अध्यायों में हमने विविध त्रिकोणमितीय फलनों के विस्तार ज्ञात किये थे। अब हम परिमित एवं अनन्त श्रेणियों का योग निकालेंगे। इसमें हम अब तक प्राप्त परिणामों का प्रयोग करेंगे, जैसे द-मायवर का प्रमेय, ऑयलर का प्रमेय, sines तथा cosines के घातीय मान, लघुगुणकीय विस्तार, ग्रेगरी श्रेणी इत्यादि।

९.०२ sine श्रेणी का योग जिसमें कोण समानान्तर श्रेणी में हैं—मान लें कि श्रेणी नीचे दी हुई श्रेणी है

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\dots\dots\dots\dots\dots\dots+\sin\{\alpha+(n-1)\beta\},$$

जिसमें n पद हैं, तथा कोणों का सार्वअंतर β है।

यदि इस श्रेणी का योग S से सूचित करें, तो

$$S=\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\dots\dots\dots\dots+\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}\dots\dots\dots\quad(1)$$

अब (1) के दोनों पक्षों 2 sin $\beta/2$ से गुणा करने पर

$$2\sin\beta/2.\,S=2\sin\alpha\sin\beta/2+2\sin(\alpha+\beta)\sin\beta/2+\dots\dots+2\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}\sin\beta/2.$$

हमें विदित है कि

$$2\sin\alpha\sin\beta/2=\cos(\alpha-\beta/2)-\cos(\alpha+\beta/2),$$

$$2\sin(\alpha+\beta)\sin\beta/2=\cos(\alpha+\beta/2)-\cos(\alpha+3\beta/2),$$

$$2\sin(\alpha+2\beta)\sin\beta/2=\cos\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{5\beta}{2}\right)$$

....

....

$$2\sin\{\alpha+(n-2)\beta\}\sin\beta/2=\cos\{\alpha+(2n-5)\beta/2\}-\cos\{\alpha+(2n-3)\beta/2\}$$

$$2\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}\sin\beta/2=\cos\{\alpha+(2n-3)\beta/2\}-\cos\{\alpha+(2n-1)\beta/2\}$$

अब दोनों स्तम्भों को जोड़ने पर दाहिनी ओर प्रथम तथा अन्तिम पदों के अतिरिक्त अन्य सभी पद आपस में कट जायेंगे, तथा हमें प्राप्त होगा

$$2\sin\beta/2.\ S=\cos(\alpha-\beta/2)-\cos\{\alpha+(2n-1)\beta/2\},$$
$$=2\sin\{\alpha+(n-1)\beta/2\}\sin n\beta/2.$$

अतएव
$$S=\frac{\sin n\beta/2}{\sin\beta/2}\sin\{\alpha+(n-1)\beta/2\},$$
$$=\frac{\sin n\beta/2}{\sin\beta/2}\cdot\sin\tfrac{1}{2}\{2\alpha+(n-1)\beta\}.$$

अन्तिम फल को हम शब्दों में निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं

$$S=\frac{\sin(\text{अर्द्ध सार्वअंतर का } n \text{ गुना})}{\sin(\text{अर्द्ध सार्वअंतर})}\sin\left\{\frac{\text{प्रथम कोण}+\text{अंतिम कोण}}{2}\right\}$$

उप-सिद्धान्त १—यदि $\beta=\alpha$, तो

$$\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha+\ldots\ldots+\sin n\alpha$$

$$=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin(n+1)\frac{\alpha}{2}.$$

उप-सिद्धान्त २—यदि β के स्थान पर $\beta+\pi$ रखें तो

$$\sin\alpha-\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)-\ldots\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}$$

$$=\frac{\sin\frac{n(\beta+\pi)}{2}}{\sin\frac{\beta+\pi}{2}}\sin\{\alpha+\tfrac{1}{2}(n-1)(\beta+\pi)\}.$$

उप-सिद्धान्त ३— यदि α के स्थान पर $\alpha+\pi/2$ रखें तो

$$\sin(\alpha+\pi/2)+\sin(\alpha+\pi/2+\beta)+\ldots\ldots+\sin\{\alpha+\pi/2+(n-1)\beta\}$$

$$=\frac{\sin n\beta/2}{\sin\beta/2}\sin\{\alpha+\pi/2+\tfrac{1}{2}(n-1)\beta\}$$

या
$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\ldots\ldots+\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}$$

$$=\frac{\sin n\beta/2}{\sin\beta/2}\cdot\cos\{\alpha+\tfrac{1}{2}(n-1)\beta\}.$$

इस फल को अब हम स्वतंत्र रूप से प्राप्त करेंगे ।

९.०३ cosine श्रेणी का योग जिसमें कोण समानान्तर श्रेणी में हैं—श्रेणी $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\ldots+\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}$ का योग हम इसे sine श्रेणी की विशिष्ट स्थित मान कर उपर निकाल चुके हैं। अब इसे sine श्रेणी की विधि से भी ज्ञात करेंगे । मान ले

$$C=\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\ldots\ldots+\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}.$$

दोनों पक्षों को $2\sin\beta/2$ से गुणा करने पर

$$(2\sin\beta/2)C=2\cos\alpha.\sin\beta/2+2\cos(\alpha+\beta)\sin\beta/2+2\cos(\alpha+2\beta)\sin\beta/2+\ldots\ldots+2\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}\sin\beta/2.$$

हमें विदित है कि

$$2\cos\alpha\sin\beta/2=\sin(\alpha+\beta/2)-\sin(\alpha-\beta/2),$$

$$2\cos(\alpha+\beta)\sin\beta/2=\sin(\alpha+3\beta/2)-\sin(\alpha+\beta/2),$$

$$2\cos(\alpha+2\beta)\sin\beta/2=\sin(\alpha+5\beta/2)-\sin(\alpha+3\beta/2),$$

....

....

$$2\cos\{\alpha+(n-2)\beta\}\sin\beta/2=\sin\{\alpha+(2n-3)\beta/2\}-\sin\{\alpha+(2n-5)\beta/2\},$$

$$2\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}\sin\beta/2=\sin\{\alpha+(2n-1)\beta/2\}-\sin\{\alpha+(2n-3)\beta/2\}.$$

अब दोनों स्तम्भों को जोड़ने पर दाहिनी ओर द्वितीय तथा अन्त से द्वितीय पदों के अतिरिक्त अन्य सभी पद आपस में कट जायेंगे, तथा हमें प्राप्त होगा

$$(2\sin\beta/2).C=\sin\{\alpha+(2n-1)\beta/2\}-\sin\ (\alpha-\beta/2),$$
$$=2\cos\{\alpha+(n-1)\beta/2\}\sin(n\beta/2)$$

अतएव $C=\dfrac{\sin n\beta/2}{\sin\beta/2}\ .\cos\left\{\alpha+(n-1)\ \beta/2\right\}$

अन्तिम फल को हम निम्न प्रकार भी व्यक्त कर सकते हैं—

$$C=\frac{\sin\ (\text{अर्द्ध सार्वअंतर का } n \text{ गुना})}{\sin\ (\text{अर्द्ध सार्वअंतर})}\ .$$

$$\cos\left\{\frac{\text{प्रथम कोण}+\text{अन्तिम कोण}}{2}\right\}.$$

उप-सिद्धान्त १—यदि $\beta=\alpha$, तो हमें प्राप्त होता है

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots\ldots\ldots\ldots+\cos n\alpha$$
$$=\frac{\sin n\alpha/2}{\sin\alpha/2}\ \cos\{(n+1)\alpha/2\}.$$

उप-सिद्धान्त २—यदि β के स्थान पर $\beta+\pi$ रखें तो

$$\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)-\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(-1)^{n-1}\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}$$
$$=\frac{\sin\ \dfrac{n(\beta+\pi)}{2}}{\sin\ \dfrac{\beta+\pi}{2}}\cos\{\alpha+\tfrac{1}{2}(n-1)(\beta+\pi)\}.$$

टिप्पणी—sine एवं cosine श्रेणियों में β के स्थान पर $2\pi/n$ रखने से दोनों श्रेणियों के योग शून्य होंगे, क्यों कि तब

$$\sin\ \frac{n\beta}{2}=\sin\pi=0.$$

यह परिणाम अत्यन्त महत्वपूर्ण है।

उदाहरण १। सिद्ध करो कि

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{6\pi}{2n+1}+\ldots\ldots\ldots$$
$$+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\tfrac{1}{2}.$$

इस कोज्या श्रेणी में कोण समानान्तर श्रेणी में हैं जिनका सार्वअंतर $(2\pi/2n+1)$ है। अतएव इसका योग

$$=\frac{\sin\frac{n\pi}{2n+1}}{\sin\frac{\pi}{2n+1}}\cos\left\{\frac{(n+1)\ \pi}{2n+1}\right\},$$

$$=\frac{\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2n+1}}{2\sin\frac{\pi}{2n+1}},$$

$$=-\tfrac{1}{2}.$$

उदाहरण २। निम्न श्रेणी का योग n पदों तक निकालो

$$\sin(2n-1)\ \theta+\sin(2n-3)\theta+\sin(2n-5)\theta+\ldots\ldots$$

इस sine श्रेणी के कोण समानान्तर श्रेणी में है जिसका सार्वअंतर -2θ है। अतएव इसका योग

$$=\frac{\sin\frac{n}{2}(-2\theta)}{\sin\frac{1}{2}(-2\theta)}\sin\tfrac{1}{2}\Big[(2n-1)\ \ \theta+\{2n-\ (2n-1)\}\theta\Big]$$

$$=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}.\sin n\theta=\frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}.$$

उदाहरण ३। त्रिज्या r तथा केन्द्र o के एक वृत्त के अन्दर n भुजाओं का एक सम बहुभुज $A_1A_2A_3\ldots A_n$ है, तथा चाप A_nA_1 पर एक विन्दु A ऐसा है कि कोण $A0A_1=\theta$. A को बहुभुज के शीर्षों से मिलाने वाली रेखाओं की लम्बाई का योग निकालो।

क्योंकि कोणों $A_10A_2, A_20A_3,\ldots\ldots\ldots, A_n0A_1$ में से प्रत्येक $2\pi/n$ है, इसलिए कोण $A0A_1$, $A0A_2,\ldots\ldots\ldots\ldots$ क्रमशः

$\theta,\theta+\dfrac{2\pi}{n},\theta+\dfrac{4\pi}{n},\ \ldots\ldots\ldots\ldots$ हैं,

अतएव $\quad AA_1=2r\sin\left(\dfrac{A0A_1}{2}\right)=2r\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right),$

$$AA_2 = 2r \sin\left(\frac{A0A_2}{2}\right) = 2r \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{n}\right),$$

$$AA_3 = २r \sin\left(\frac{A0A_3}{2}\right) = 2r \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2\pi}{n}\right),$$

....

....

अतः लम्बाइयों का अभीष्ट योग

$$= 2r\left[\sin\theta/2 + \sin(\theta/2 + \pi/n) + \sin(\theta/2 + 2\pi/n) + \ldots\right]$$

$$= 2r \frac{\sin\frac{n\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} \sin\left\{\frac{\theta}{2} + \frac{(n-1)\pi}{2n}\right\},$$

$$= 2r \operatorname{cosec}\frac{\pi}{2n} \cdot \sin\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2n}\right\},$$

$$= 2r \operatorname{cosec}\frac{\pi}{2n} \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2n}\right).$$

९.०४ निम्न श्रेणियों का योग निकालना—

$$\sin^m\alpha + \sin^m(\alpha+\beta) + \sin^m(\alpha+2\beta) + \ldots + \sin^m\{\alpha+(n-1)\beta\}, \quad (1)$$

तथा $$\cos^m\alpha + \cos^m(\alpha+\beta) + \cos^m(\alpha+2\beta) + \ldots + \cos^m\{\alpha+(n-1)\beta\} - \quad (2)$$

अध्याय तीन में § ३.०१ की सहायता से हम (1) तथा (2) के प्रत्येक पद का विस्तार θ के अपवर्त्यों के sine अथवा cosine की श्रेणी में कर सकते हैं। अतएव प्रत्येक श्रेणी कई श्रेणियों में विभक्त हो जायगी जिनके कोण समानान्तर श्रेणी में होंगे। पूर्वगामी सूत्रों से इन श्रेणियों के मान सुगमता से ज्ञात हो जायेंगे।

यह ध्यान देने योग्य है कि यदि $\beta = 2\pi/n$, तथा $m < n$, तो (1) तथा (2) के योग केवल संख्यात्मक होंगे जो कोणों पर आश्रित नहीं होंगे। पूर्ण संख्या m को पूर्ण संख्या n से कम इसलिए माना गया है कि श्रेणियों के योगों के हर शून्य न हो जायँ, क्योंकि तब इनके मान अनन्त हो जायेंगे।

उदाहरण १ । निम्न श्रेणी का योग निकालो

$\sin^3\theta + \sin^3(\theta+\phi) + \sin^3(\theta+2\phi) + \ldots\ldots\ldots n$ पदों तक ।

हमें विदित है कि

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta,$$

जिससे $\sin^3\theta = \frac{1}{4}[3\sin\theta - \sin 3\theta]$.

अतएव श्रेणी को इस प्रकार लिख सकते हैं

$$\tfrac{3}{4}[\sin\theta + \sin(\theta+\phi) + \sin(\theta+2\phi) + \ldots\ldots\ldots + \sin\{\theta+(n-1)\phi\}]$$

$$-\tfrac{1}{4}[\sin 3\theta + \sin 3(\theta+\phi) + \ldots\ldots + \sin 3\{\theta+(n-1)\phi\}]$$

$$= \tfrac{3}{4}\frac{\sin\frac{n\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}}\cdot\sin\{\theta+\tfrac{1}{2}(n-1)\phi\} - \tfrac{1}{4}\frac{\sin\frac{3n\phi}{2}}{\sin\frac{3\phi}{2}}\sin\{3\theta+\tfrac{3}{2}(n-1)\phi\}.$$

उदाहरण २ । योग करो

$\cos^2\theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 3\theta + \ldots\ldots\ldots n$ पदों तक ।

हमें विदित है कि $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$,

तथा $\cos^2 2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)$, इत्यादि ।

अतः श्रेणी का योग

$$= \frac{n}{2} + \tfrac{1}{2}[\cos 2\theta + \cos 4\theta + \ldots\ldots\ldots + \cos 2n\theta]$$

$$= \frac{n}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\cdot\cos(n+1)\theta$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{1}{4\sin\theta}\Big[\sin(2n+1)\theta - \sin\theta\Big]$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{\sin(2n+1)\theta}{4\sin\theta} - \tfrac{1}{4}$$

$$= \frac{(2n-1)}{4} + \tfrac{1}{4}\sin(2n+1)\theta\,\mathrm{cosec}\,\theta.$$

उदाहरण

निम्न श्रेणियों का योग निकालो

1. $\cos\frac{\theta}{2}+\cos 2\theta+\cos\frac{7\theta}{2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n$ पदों तक।

2. $\cos\frac{\pi}{2n+1}+\cos\frac{3\pi}{2n+1}+\cos\frac{5\pi}{2n+1}$

$+\ldots\ldots\ldots\ldots n$ पदों तक।

3. $\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}+\sin\frac{5\theta}{2}+\ldots\ldots n$ पदों तक।

[बनारस, १९५०]

4. $\sin\theta\sin 2\theta+\sin 2\theta\sin 3\theta+\sin 3\theta\sin 4\theta$

$+\ldots\ldots\ldots\ldots n$ पदों तक।

[इलाहाबाद, १९२७]

5. $\cos\theta\sin 2\theta+\cos 2\theta\sin 3\theta+\cos 3\theta\sin 4\theta$

$+\ldots\ldots\ldots\ldots n$ पदों तक।

6. $\cos^4\theta+\cos^4 2\theta+\cos^4 3\theta+\ldots\ldots\ldots\ldots n$ पदों तक।

7. सिद्ध करो कि

$$\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\cos n\theta$$
$$=\frac{\cos(n+1)\theta/2.\ \sin n\theta/2}{\sin\theta/2}.$$

तथा इससे $6\ n^2$ का मान प्राप्त करो।

8. एक वृत के भीतर एक सम बहुभुज खींचा गया है। परिधि के किसी नियत विन्दु से बहुभुज के प्रत्येक शीर्ष तक जीवा खींची गई है। जीवाओं के वर्गों का योग निकालो।

9. त्रिज्या r तथा केन्द्र O के वृत्त के भीतर एक सम बहुभुज खींचा गया है, जिसके शीर्ष $A_1, A_2, \ldots . A_n$ हैं। चाप A_nA_1 पर एक विन्दु ऐसा है कि कोण $AOA_1=\theta$. त्रिज्याओं $OA_1, OA_2, OA_3\ldots\ldots\ldots$ पर A से लम्ब क्रमशः $AL_1, AL_2, \ldots\ldots$ डाले गये हैं। सिद्ध करो कि

(i) $AL_1^2+AL_2^2+AL_3^2+\ldots\ldots=\frac{1}{2}nr^2,$

(ii) $AA_1^2+AA_2^2+AA_3^2+\ldots\ldots=2nr^2$,

(iii) $A_1A_2^2+A_1A_2^2+A_1A_4^2+\ldots\ldots=2nr^2$.

९.०४ श्रेणियों के योग की अन्तर विधि--कभी कभी किसी श्रेणी के प्रत्येक पद को दो खंडों में विश्लिष्ट कर देते हैं, जिससे योग करने पर प्रथम तथा अन्तिम खंडों के अतिरिक्त सब खंड कट जाते हैं। मान लें कि श्रेणी

$$u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots+u_{n-1}+u_n$$

का rth पद $u_r=f(r+1)-f(r)$, है जहाँ $f(r)$, संख्या r का एक फलन है।

तब
$$u_1 = f(2) - f(1),$$
$$u_2 = f(3) - f(2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{n-1}=f(n)-f(n-1)$$
$$u_n = f(n+1)-f(n)$$

जिससे स्तम्भों का योग करने पर

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n=f(n+1)-f(1).$$

योग की अन्तर विधि प्रयुक्त करने के लिए आवश्यक है कि हम प्रत्येक पद को उचित रूप में विश्लिष्ट कर सकें। यदि श्रेणी का योग n के फलन के रूप में ज्ञात हो, तो उसमें $n=1$ रखने पर हमें पहले पद के खंड प्राप्त हो जायेंगे।

यदि श्रेणी $u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots+u_n+\ldots\ldots$ अनन्त परन्तु अभिसारी हो, तो इसका योग अनन्त तक के लिए निकाला जा सकता है। n पदों के योग की सीमा ही अभीष्ट योग होगी। अतः

$$\sum_1^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} [f(n+1)-f(1)].$$

उदाहरण १। योग करो

$$\tan^{-1}\frac{1}{1+1+1^2}+\tan^{-1}\frac{1}{1+2+2^2}+\tan^{-1}\frac{1}{1+3+3^2}+\ldots$$
$$+\tan^{-1}\frac{1}{1+n+n^2}.$$

[इलाहाबाद, १९४५, बनारस १९४९]

श्रेणी का nth पद $= \tan^{-1}\dfrac{1}{1+n+n^2}$

$$= \tan^{-1}\frac{(n+1)-n}{1+(n+1)n}$$

$$= \tan^{-1}(n+1)-\tan^{-1}n.$$

अब n को क्रमशः $1,2,3,\ldots\ldots.n$ रखने पर श्रेणी के क्रमागत पद निम्न हैं

$$\tan^{-1}2 - \tan^{-1}1$$
$$\tan^{-1}3 - \tan^{-1}2$$
$$\tan^{-1}4 - \tan^{-1}3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\tan^{-1}n - \tan^{-1}(n-1)$$
$$\tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1}n$$

अतएव स्तम्भों का योग करने पर श्रेणी का योग

$$= \tan^{-1}(n+1)-\tan^{-1}1.$$

यदि $n\to\infty$, तो अनन्त श्रेणी का योग

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

हम nth पद को निम्न रूप में भी लिख सकते हैं

$$\tan^{-1}\frac{1}{1+n+n^2} = \tan^{-1}\frac{1}{1+n(n+1)}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\dfrac{1}{n(n+1)}}{1+\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{(n+1)}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{(n+1)}}{1+\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{(n+1)}}$$

$$= \tan^{-1}\frac{1}{n} - \tan^{-1}\frac{1}{(n+1)}$$

और फिर n के क्रमशः मान रखकर योग ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण २। योग करो

$$\cot^{-1}(2.1^2)+\cot^{-1}(2.2^2)+\cot^{-1}(2.3^2)+\ldots\ldots \text{अनन्त तक.}$$

[इलाहाबाद, १९५२; यू० पी० सिविल सर्विस, १९४८]

इस श्रेणी का nth पद $= \cot^{-1}(2.n^2)$

$$= \cot^{-1}(2n-1)-\cot^{-1}(2n+1).$$

अतः यदि श्रेणी के क्रमागत पदों को $u_1, u_2, \ldots\ldots u_n, \ldots\ldots$ से सूचित करें, तो

$$u_1 = \cot^{-1}(1) - \cot^{-1}(3)$$

$$u_2 = \cot^{-1}(3) - \cot^{-1}(5)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_{n-1} = \cot^{-1}(2n-3) - \cot^{-1}(2n-1)$$

$$u_n = \cot^{-1}(2n-1) - \cot^{-1}(2n+1)$$

स्तम्भों को जोड़ने से

$$\sum_1^n u_n = [\cot^{-1}(1)-\cot^{-1}(2n+1)$$

अतएव
$$\sum_1^\infty u_n = \lim_{n\to\infty}[\cot^{-1}(1)-\cot^{-1}(2n+1)]$$

$$= \cot^{-1}(1)-0$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

उदाहरण ३। योग करो

$$\cos\frac{\theta}{2}+2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}+2^2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cos\frac{\theta}{2^3}$$
$$+\ldots\ldots \text{अनन्त तक।}$$

[इलाहाबाद, १९२७]

यदि u_n श्रेणी का nth पद हो तो

$$u_n = 2^{n-1} \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2^2} \cos\frac{\theta}{2^3} \cdots\cdots \cos\frac{\theta}{2^n}.$$

अतः
$$2\sin\frac{\theta}{2^n} \cdot u_n = 2^n \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2^2} \cos\frac{\theta}{2^3} \cdots\cdots \cos\frac{\theta}{2^n} \sin\frac{\theta}{2^n},$$

$$= \sin\theta$$

$$\therefore\ u_n = \sin\theta / 2\sin\frac{\theta}{2^n}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sin\theta \left(\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2^{n+1}} - \cos\frac{\theta}{2^n}}{\sin\frac{\theta}{2^n}} \right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\sin\theta \left(\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2^{n+1}}}{2\sin\frac{\theta}{2^{n+1}} \cdot \cos\frac{\theta}{2^{n+1}}} - \cot\frac{\theta}{2^n} \right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\sin\theta \left[\cot\frac{\theta}{2^{n+1}} - \cot\frac{\theta}{2^n} \right].$$

अब n को 1, 2, 3,...... रखने पर

$$u_1 = \tfrac{1}{2}\sin\theta \left[\cot\frac{\theta}{2^2} - \cot\frac{\theta}{2} \right],$$

$$u_2 = \tfrac{1}{2}\sin\theta \left[\cot\frac{\theta}{2^3} - \cot\frac{\theta}{2^2} \right],$$

$$u_3 = \tfrac{1}{2}\sin\theta \left[\cot\frac{\theta}{2^4} - \cot\frac{\theta}{2^3} \right],$$

....

$$u_{n-1} = \tfrac{1}{2}\sin\theta \left[\cot\frac{\theta}{2^n} - \cot\frac{\theta}{2^{n-1}} \right],$$

$$u_n = \tfrac{1}{2}\sin\theta \left[\cot\frac{\theta}{2^{n+1}} - \cot\frac{\theta}{2^n} \right].$$

अतएव स्तम्भों को जोड़ने पर,

$$\sum_{1}^{n} u_n = \frac{1}{2} \sin\theta \left[\cot\frac{\theta}{2^{n+1}} - \cot\frac{\theta}{2} \right]$$

उदाहरण ४। सिद्ध करो

$$\frac{1}{\cos\theta + \cos 3\theta} + \frac{1}{\cos\theta + \cos 5\theta} + \frac{1}{\cos\theta + \cos 7\theta} + \ldots\ldots n \text{ पदों तक}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{cosec}\theta \{\tan(n+1)\theta - \tan\theta\}.$$

[इलाहाबाद, १९४४]

श्रेणी का प्रथम पद $u_1 = \dfrac{1}{\cos\theta + \cos 3\theta}$,

$$= \frac{1}{2\cos\theta\cos 2\theta},$$

$$= \frac{1}{2\sin\theta} \cdot \frac{\sin(2\theta - \theta)}{\cos\theta\cos 2\theta}$$

$$= \frac{1}{2\sin\theta} \cdot \frac{\sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\sin\theta}{\cos\theta\cos 2\theta}$$

$$= \frac{1}{2\sin\theta} \cdot [\tan 2\theta - \tan\theta]$$

अतः $u_1 = \frac{1}{2} \operatorname{cosec}\theta [\tan 2\theta - \tan\theta]$.

इसी प्रकार $u_2 = \frac{1}{2} \operatorname{cosec}\theta [\tan 3\theta - \tan 2\theta]$,

$u_3 = \frac{1}{2} \operatorname{cosec}\theta [\tan 4\theta - \tan 3\theta]$,

....

$u_{n-1} = \frac{1}{2} \operatorname{cosec}\theta [\tan n\theta - \tan(n-1)\theta]$,

तथा $u_n = \frac{1}{2} \operatorname{cosec}\theta [\tan(n+1)\theta - \tan n\theta]$

अतः स्तम्भों को जोड़ने पर

$$\sum_{1}^{n} u_n = \frac{1}{2} \operatorname{cosec}\theta [\tan(n+1)\theta - \tan\theta].$$

उदाहरण ५ । निम्न श्रेणी का योग करो

$\tan x \tan 2x + \tan 2x \tan 3x + \dots \dots + \tan nx \tan (n+1)x$,

तथा सिद्ध करो कि

$$1.2+2.3+ \dots \dots + n(n+1) = \tfrac{1}{3} n(n+1)(n+2).$$

हमें विदित है कि

$$\tan x = \tan (n+1-n)x$$

$$= \frac{\tan (n+1)x - \tan nx}{1 + \tan nx . \tan (n+1)x},$$

जिससे $\tan (n+1)x . \tan nx = \cot x \{\tan (n+1)x - \tan nx\} - 1.$

इसमें $n = 1, 2, 3, \dots \dots$ रखने पर

$u_1 = \cot x [\tan 2x - \tan x] - 1,$

$u_2 = \cot x [\tan 3x - \tan 2x] - 1,$

. . . .

$u_{n-1} = \cot x [\tan nx - \tan (n-1)x] - 1,$

$u_n = \cot x [\tan (n+1)x - \tan nx] - 1.$

अब स्तम्भों को जोड़ने पर, श्रेणी का योग अर्थात्

$$\sum_1^n u_n = \cot x [\tan (n+1)x - \tan x] - n.$$

$$= \cot x \tan (n+1)x - 1 - n,$$

$$= \tan (n+1)x . \cot x - (n+1)$$

$\therefore \tan x \tan 2x + \tan 2x \tan 3x + \tan 3x . \tan 4x + \dots$

$= \tan (n+1)x . \cot x - (n+1) \quad \dots \dots \dots \quad (1)$

हमें विदित है कि

$$\tan x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots \dots \dots \dots$$

अतः परिणाम (1) में $\tan x$, $\tan 2x$,.. आदि का विस्तार करने पर

$$(x+\tfrac{1}{3}x^3+\ldots)(2x+\tfrac{1}{3}.2^3x^3+\ldots)+(2x+\tfrac{1}{3}.2^3x^3+\ldots)(3x+\tfrac{1}{3}.3^3x^3+\ldots)+\ldots$$

$$+\ldots+(nx+\tfrac{1}{3}.n^3x^3+\ldots)\{(n+1)x+\tfrac{1}{3}(n+1)^3x^3+\ldots\}$$

$$=\frac{\{(n+1)x+\frac{1}{3}(n+1)^3x^3+\ldots\}-(n+1)\{x+\frac{1}{3}x^3+\ldots\}}{(x+\frac{1}{3}x^3+\ldots)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}(n+1)x^3\{(n+1)^2-1\}+\ldots\ldots}{x+\frac{1}{3}x^3+\ldots\ldots}$$

$$=\{\tfrac{1}{3}(n+1)x^3(n^2+2n)+\ldots\}x^{-1}\{1+\tfrac{1}{3}x^2+\ldots\ldots\}^{-1}$$

$= \frac{1}{3}(n+1)(n^2+2n)x^2+x$ के उच्चतर घात ।

अब दोनों पक्षों में x^2 के घात बराबर करने पर

$$1.2+2.3.+3.4+\ldots+n(n+1)=\tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

उदाहरण

योग करो

1. $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{13}+\tan^{-1}\frac{1}{21}+\ldots n$ पदों तक ।

[इलाहाबाद, १९२३; बनारस १९५२]

2. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{x}{1+1.2x^2}+\tan^{-1}\frac{x}{1+2.3x^2}+\ldots\ldots$ अनन्त तक ।

[इलाहाबाद, १९४७; बनारस, १९४५]

3. $\tan^{-1}\frac{2}{1^2}+\tan^{-1}\frac{2}{2^2}+\tan^{-1}\frac{2}{2^3}+\ldots n$ पदों तक ।

4. $\tan\theta+\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{\theta}{2^2}+\ldots\ldots n$ पदों तक ।

[बनारस, १९४७]

5. $\operatorname{cosec}\theta\operatorname{cosec}2\theta+\operatorname{cosec}2\theta\operatorname{cosec}3\theta+\ldots n$ पदों तक ।

6. $\dfrac{1}{\sin\theta \cos 2\theta} - \dfrac{1}{\cos 2\theta \sin 3\theta} + \dfrac{1}{\sin 3\theta \cos 4\theta} -$ ...... n पदों तक ।

[आगरा, १९४१]

7. $\dfrac{1}{\sin\theta \sin 2\theta} + \dfrac{1}{\sin 2\theta \sin 3\theta} + \dfrac{1}{\sin 3\theta \sin 4\theta} +$ ......n पदों तक ।

[इलाहाबाद, १९२६]

8. $\tan\dfrac{\theta}{2} \sec\theta + \tan\dfrac{\theta}{4} \sec\dfrac{\theta}{2} + \tan\dfrac{\theta}{8} \sec\dfrac{\theta}{4}$ $+$ ....n पदों तक ।

[आगरा, १९४३]

9. $\cot\theta \cot 2\theta + \cot 2\theta \cot 3\theta + \cot 3\theta . \cot 4\theta +$ ......n पदों तक ।

10. $\sec\theta \sec 2\theta + \sec 2\theta \sec 3\theta + \sec 3\theta \sec 4\theta +$ ......n पदों तक ।

11. $\tan\theta + 2\tan 2\theta + 2^2 \tan 2^2\theta + 2^3 \tan 2^3\theta +$ ......n पदों तक ।

[आगरा, १९४०]

12. $\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{cosec} 2\theta + \ldots\ldots + \operatorname{cosec} 2^{n-1}\theta.$

[इलाहाबाद, १९४७]

13. $\tan^2 x . \tan 2x + \frac{1}{2}\tan^2 2x \tan 4x + \dfrac{1}{2^2}$ $\tan^2 4x \tan 8x +$ ......n पदों तक । [बनारस, १९४८]

14. $2\operatorname{cosec} 2\theta \cot 2\theta + 4\operatorname{cosec} 4\theta \cot 4\theta + 8\operatorname{cosec} 8\theta$ $\cot 8\theta +$ ....n पदों तक ।

15. $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}} + \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{12}} + \ldots\ldots$

$$+\sin^{-1}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{(n-1)}}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

[बनारस, १९४३]

९०५ श्रेणियों के योग की व्यापक विधि—जब किसी sine अथवा cosine श्रेणी के कोण समानान्तर श्रेणी में नहीं होते, या उसके प्रत्येक पद को दो उचित रूप के खंडों में विश्लिष्ट नहीं किया जा सकता, तो हम योग की एक व्यापक विधि प्रयोग करते हैं, जिसे $C+iS$ रीति भी कहते हैं। इसके अनुसार हम cosine श्रेणी को C के बराबर तथा sine श्रेणी को S के बराबर मान कर sine श्रेणी को i से गुणा करके दोनों श्रेणियों के योग से प्राप्त श्रेणी को $C+iS$ से सूचित करते हैं। ऑयलर के प्रमेय के प्रयोग से $C+iS$ की श्रेणी के प्रत्येक पद को $e^{i\theta}$ के फलन के रूप में व्यक्त करके इस श्रेणी का योग ज्ञात कर लेते हैं। अब इस योग को वास्तविक एवं काल्पनिक अंशों में पृथक् करने पर हमें C तथा S का मान प्राप्त हो जाता है।

cosine अथवा sine श्रेणी के ज्ञात होने पर दूसरी श्रेणी को पहली की सहायक श्रेणी कहते हैं।

योग की $C+iS$ विधि इस सिद्धान्त पर निर्भर है कि मिश्र काल्पनिक राशि के एक फलन का विस्तार करके उसे वास्तविक एवं काल्पनिक फलनों की श्रेणियों में विश्लिष्ट किया जा सकता है। ये cosine तथा sine श्रेणी होती हैं तथा इनके योग मूल मिश्र काल्पनिक फलन के क्रमशः वास्तविक तथा काल्पनिक अंशों के बराबर होते हैं।

$C+iS$ विधि से योग किये जाने वाली विविध श्रेणियों में सबसे महत्वपूर्ण कार्य $C+iS$ के लिए लब्ध श्रेणी का योग करना होता है। यह लब्ध श्रेणी निम्न में से किसी प्रकार की हो सकती है—

(i) गुणोत्तर श्रेणी,

(ii) द्विपद श्रेणी,

(iii) घातीय श्रेणी, अथवा विशिष्ट स्थिति में sine अथवा cosine श्रेणी,

(iv) लघुगुणकीय श्रेणी, या विशिष्ट स्थिति में ग्रेगरी श्रेणी,

(v) आवर्त श्रेणी

निम्न उदाहरणों से $C+iS$ के लिए लब्ध श्रेणी के योग करने की विधि स्पष्ट है।

उदाहरण १। निम्न श्रेणी का योग ज्ञात करो

$$1+x\cos\theta+x^2\cos 2\theta+\ldots\ldots+x^{n-1}\cos(n-1)\theta.$$

[आगरा, १९४७]

cosine श्रेणी को C से तथा इसकी सहायक sine श्रेणी को S से सूचित करने पर

$$C=1+x\cos\theta+x^2\cos 2\theta+\ldots\ldots+x^{n-1}\cos(n-1)\theta,$$

श्रेणी $S=x\sin\theta+x^2\sin 2\theta+\ldots\ldots+x^{n-1}\sin(n-1)\theta.$

अत: $C+iS=1+x(\cos\theta+i\sin\theta)+x^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$
$+\ldots\ldots+x^{n-1}[\cos(n-1)\theta+i\sin(n-1)\theta]$

$$=1+xe^{i\theta}+x^2e^{2i\theta}+\ldots\ldots+x^{n-1}e^{i(n-1)\theta} \quad \ldots.(1)$$

श्रेणी (1) गुणोत्तर श्रेणी है, जिसका प्रथम पद 1, तथा जिसका सार्व अनुपात $xe^{i\theta}$ है। अतएव (1) का योग

$$=\frac{1-x^ne^{in\theta}}{1-xe^{i\theta}}=\frac{1-x^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)}{1-x(\cos\theta+i\sin\theta)},$$

$$=\frac{(1-x^n\cos n\theta)-i\,x^n\sin n\theta}{(1-x\cos\theta)-i\,x\sin\theta},$$

$$=\frac{\{(1-x^n\cos n\theta)-i\,x^n\sin n\theta\}\{(1-x\cos\theta)+ix\sin\theta\}}{(1-x\cos\theta)^2+x^2\sin^2\theta},$$

$$=\frac{(1-x^n\cos n\theta)(1-x\cos\theta)+x^{n+1}\sin n\theta\sin\theta}{(1-x\cos\theta)^2+x^2\sin^2\theta}$$

$$+i\,\frac{x\sin\theta(1-x^n\cos n\theta)-x^n\sin n\theta(1-x\cos\theta)}{(1-x\cos\theta)^2+x^2\sin^2\theta}.$$

अतएव वास्तविक एवं काल्पनिक अंशों को बराबर करने पर

$$C=\frac{(1-x^n\cos n\theta)(1-x\cos\theta)+x^{n+1}\sin n\theta\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2},$$

तथा $$S=\frac{x(1-x^n\cos n\theta)\sin\theta-x^n(1-x\cos\theta)\sin n\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}.$$

टिप्पणी १—यदि दत्त श्रेणी में हम $x=1$ रखदें, तो

हमें $1+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots\ldots+\cos(n-1)\theta,$

तथा $\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots\ldots+\sin(n-1)\theta$,
के मान उपर्युक्त परिणामों से प्राप्त हो जायेंगे। इसका आशय है कि साधारण cosine तथा sine श्रेणियाँ जिनके कोण समानान्तर श्रेणी में हैं, व्यापक विधि से भी योग की जा सकती हैं।

टिप्पणी २—यदि $x<1$, अर्थात् $xe^{i\theta}<1$, तो श्रेणी (1) का अनन्त तक मान निम्न होगा

$$C+iS=\frac{1}{1-xe^{i\theta}}=\frac{1-xe^{-i\theta}}{(1-xe^{i\theta})(1-xe^{-i\theta})}$$

$$=\frac{1-x(\cos\theta-i\sin\theta)}{1-2x\cos\theta+x^2},$$

अतः $C=\dfrac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$,

एवं $S=\dfrac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$.

अर्थात् जब $x<1$, तब

$$\frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}=1+x\cos\theta+x^2\cos 2\theta+\ldots\ldots\ldots\infty$$

तथा $\dfrac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}=x\sin\theta+x^2\sin 2\theta+\ldots\ldots\ldots\ldots\infty$

उदाहरण २। निम्न श्रेणी का योग निकालो

$${}^nC_1\sin\theta+{}^nC_2\sin 2\theta+{}^nC_3\sin 3\theta+\ldots\ldots+{}^nC_n\sin n\theta.$$

मान लें

$$S={}^nC_1\sin\theta+{}^nC_2\sin 2\theta+{}^nC_3\sin 3\theta+\ldots\ldots\ldots\ldots+{}^nC_n\sin n\theta,$$

तथा $C={}^nC_1\cos\theta+{}^nC_2\cos 2\theta+{}^nC_3\cos 3\theta+\ldots\ldots\ldots\ldots+{}^nC_n\cos n\theta.$

अतः $C+iS = {}^nC_1e^{i\theta} + {}^nC_2e^{2i\theta} + {}^nC_3e^{3i\theta} + \ldots + {}^nC_ne^{ni\theta}$

यदि $e^{i\theta} = z$, तो

$$
\begin{aligned}
C+iS &= {}^nC_1\, z + {}^nC_2\, z^2 + {}^nC_3\, z^3 + \ldots\ldots + {}^nC_n\, z^n \\
&= (1+z)^n - 1 \\
&= (1+e^{i\theta})^n - 1, \qquad z \text{ का मान रखने पर।} \\
&= (1+\cos\theta + i\sin\theta)^n - 1, \\
&= \left[2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]^n - 1, \\
&= 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)^n - 1, \\
&= \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\theta}{2} + i\sin\frac{n\theta}{2}\right) - 1.
\end{aligned}
$$

अतः $S = \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n \sin\frac{n\theta}{2}$.

एवं $C = \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n \cos\frac{n\theta}{2} - 1$.

उदाहरण ३। योग करो

$$1 - \tfrac{1}{2}\cos\theta + \frac{1.3}{2.4}\cos 2\theta - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cos 3\theta + \ldots\ldots\infty$$

जहाँ $-\pi < \theta < \pi$ [बनारस, १९४५]

मान लें

$$C = 1 - \tfrac{1}{2}\cos\theta + \frac{1.3}{2.4}\cos 2\theta - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cos 3\theta + \ldots,$$

$$S = -\tfrac{1}{2}\sin\theta + \frac{1.3}{2.4}\sin 2\theta - \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin 3\theta + \ldots\ldots$$

जिससे $C+iS = 1-\frac{1}{2}e^{i\theta}+\frac{1.3}{2.4}e^{2i\theta}-\frac{1.3.5}{2.4.6}e^{3i\theta}$

$+\ldots\ldots\ldots\ldots$

यदि $z=e^{i\theta}$, तो

$$C+iS = 1-\tfrac{1}{2}z+\frac{1.3}{2.4}z^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}z^3+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 1-\frac{(1/2)}{1}z+\frac{(1/2).(3/2)}{1.2}z^2-$$

$$\frac{(1/2).(3/2).(5/2)}{1.2.3.}z^3+\ldots\ldots\ldots,$$

यह एक द्विपद श्रेणि है अतः

$$C+iS = (1+z)^{-1/2}$$

अर्थात् $= (1+e^{i\theta})^{-1/2}$ z का मान रखने पर ।

$$= (1+\cos\theta+i\sin\theta)^{-1/2}$$

$$= [2\cos^2\theta/2+2i\sin\theta/2\cos\theta/2]^{-1/2}$$

$$= (2\cos\theta/2)^{-1/2}[\cos\theta/2+i\sin\theta/2]^{-1/2}$$

$$= (2\cos\theta/2)^{-1/2}(\cos\theta/4-i\sin\theta/4)$$

$$\therefore\quad C = (2\cos\theta/2)^{-1/2}\cos\frac{\theta}{4}.$$

उदाहरण ४ । अनन्त तक योग करो

$$\cos x+\frac{\cos x}{1!}\cos 2x+\frac{\cos^2 x}{2!}\cos 3x+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

[इलाहाबाद, १९४८]

मान लें $C = \cos x+\frac{\cos x}{1!}\cos 2x+\frac{\cos^2 x}{2!}\cos 3x$

$+\ldots\ldots\ldots\ldots,$

तथा $S = \sin x + \frac{\cos x}{1!} \sin 2x + \frac{\cos^2 x}{2!} \sin 3x + \dots\dots\dots\dots$

जिससे $C + iS = e^{ix} + \frac{\cos x}{1!} e^{2ix} + \frac{\cos^2 x}{2!} e^{3ix} + \dots\dots\dots\dots$

$$= e^{ix}\left[1 + \frac{\cos x}{1!} e^{ix} + \frac{\cos^2 x}{2!} e^{2ix} + \dots\right]$$

$$= e^{ix} . e^{\cos x . e^{ix}}$$

$$= e^{ix} . e^{\cos x (\cos x + i \sin x)}$$

$$= e^{\cos^2 x} e^{i (x + \cos x \sin x)}$$

$$= e^{\cos^2 x} . \{\cos (x + \cos x \sin x) + i \sin (x + \cos x \sin x)\}$$

अतएव वास्तविक एवं काल्पनिक अंशों को बराबर करने पर

$C = e^{\cos^2 x} \times \{\cos (x + \cos x \sin x),$

तथा $S = e^{\cos^2 x} \times \sin (x + \cos x \sin x).$

उदाहरण ५। अनन्त तक योग निकालो

$$\cos x - \tfrac{1}{2} \cos 2x + \tfrac{1}{3} \cos 3x - \dots\dots\dots\dots$$

[कलकत्ता, १९४८]

मान लें $C = \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x - \dots\dots\dots\dots,$

तथा $S = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots\dots\dots\dots,$

जिससे $C + iS = e^{ix} - \frac{1}{2} e^{2ix} + \frac{1}{3} e^{3ix} - \dots\dots\dots\dots,$

$$= \log (1 + e^{ix})$$

$$= \log (1 + \cos x + i \sin x)$$

$$= \log \{(1 + \cos x)^2 + \sin^2 x\}^{1/2} + i \tan^{-1} \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$= \log (2+2\cos x)^{1/2} + i \tan^{-1} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 x/2}$$

$$= \log \left(4 \cos^2 \frac{x}{2}\right)^{1/2} + i \tan^{-1}\left(\tan \frac{x}{2} \right)$$

$$= \log \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) + i \frac{x}{2}.$$

अतः $$C = \log \left(2 \cos \frac{x}{2}\right).$$

उदाहरण ६। निम्न का योग निकालो

$$\cos x - \tfrac{1}{3} \cos 3x + \tfrac{1}{5} \cos 5x - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

[यू० पी० सिविल सर्विस, १९५०; इलाहाबाद, १९५०]

मान लें $C = \cos x - \tfrac{1}{3} \cos 3x + \tfrac{1}{5} \cos 5x - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$

तथा $S = \sin x - \tfrac{1}{3} \sin 3x + \tfrac{1}{5} \sin 5x - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$

जिससे $C + iS = e^{ix} - \tfrac{1}{3} e^{3ix} + \tfrac{1}{5} e^{5ix} - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

यह श्रेणी ग्रेगरी श्रेणी है क्योंकि

$$|e^{ix}| = |\cos x + i \sin x| = 1.$$

अतएव $C + iS = \tan^{-1} (e^{ix})$

$$= \tan^{-1} (\cos x + i \sin x)$$

अब हम इसे वास्तविक एवं काल्पनिक अंशों में विश्लिष्ट करेंगे।

हमें प्राप्त है

$$\tan^{-1} (\cos x + i \sin x) = C + iS$$

जिससे संयुग्मी फलनों के प्रगुण से

$$\tan^{-1} (\cos x - i \sin x) = C - iS$$

इनके योग से

$$2C = \tan^{-1} \frac{(\cos x + i \sin x) + (\cos x - i \sin x)}{1 - (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x)}$$

$$= \tan^{-1} \frac{2 \cos x}{1-(\cos^2 x+\sin^2 x)}$$

$$= \tan^{-1} \frac{2 \cos x}{1-1} = \tan^{-1} (\pm\infty)=\pm \frac{\pi}{2}$$

क्योंकि $\cos x$ घनात्मक अथवा ऋणात्मक हो सकता है ।

$\therefore \quad C=\pm \ \pi/4$

पुनः घटाने से

$$2iS= \tan^{-1} \frac{(\cos x+i \sin x)-(\cos x-i\sin x)}{1+(\cos x+i \sin x) (\cos x-i \sin x)}$$

$$= \tan^{-1} \frac{2i \sin x}{2} = \tan^{-1} (i \sin x)$$

अथवा $\tan (2iS) = i \sin x,$

या $i \tanh (2S) = i \sin x$

या $$\frac{e^{2S} - e^{-2S}}{e^{2S} + e^{-2S}} = \sin x.$$

अव योगान्तरानुपात से

$$\left\{2 e^{2S} | 2e^{-2S}\right\} = \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$

या $$e^{4S} = \left(\frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}\right)^2$$

अथवा $$e^{2S}=\pm \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} = \pm\frac{1+\tan \frac{x}{2}}{1-\tan \frac{x}{2}}$$

$$=\pm \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

$\therefore \; 2S = \log \{ \pm \tan (\pi/4 + x/2) \}$

$\therefore \; S = \frac{1}{2} \log \{ \pm \tan (\pi/4 + x/2) \}$

अतः $\cos\theta - \frac{1}{3} \cos 3\theta + \frac{1}{5} \cos 5\theta - \ldots\ldots = \pm \pi/4,$

एवं $\sin\theta - \frac{1}{3} \sin 3\theta + \frac{1}{5} \sin 5\theta - \ldots\ldots\ldots =$

$$\frac{1}{2} \log \{ \pm \tan (\pi/4 + x/2) \}$$

ये परिणाम अत्यन्त महत्वपूर्ण हैं।

उदाहरण ७। n पदों तक योग निकालो

$$p \cos\theta + (p+q) \cos (\theta + \phi) + (p+2q) \cos (\theta + 2\phi) + \ldots\ldots, \quad (1)$$

तथा $p \sin\theta + (p+q) \sin (\theta + \phi) + (p+2q) \sin (\theta + 2\phi) + \ldots\ldots, \quad (2)$

ये आवर्त श्रेणियाँ हैं और यदि उन्हें C और S से सूचित करें तो

$$(2 \cos \phi)\, C = 2p \cos\phi \cos\theta + 2 (p+q) \cos\phi \cos (\theta + \phi) + 2 (p+2q) \cos\phi \cos (\theta + 2\phi) + \ldots\ldots$$

$$= p \{ \cos (\theta - \phi) + \cos (\theta + \phi) \} + (p+q) \{ \cos \theta + \cos (\theta + 2\phi) \}$$

$$+ (p+2q) \{ \cos (\theta + \phi) + \cos (\theta + 3\phi) \} + \ldots\ldots$$

$$+ \{ p + (n-1)q \} [\cos\{\theta + (n-2)\phi\} + \cos\{\theta + n\phi\}]$$

$$= p \cos (\theta - \phi) + (p+q) \cos\theta + [p + (p+2q)] \cos (\theta + \phi)$$

$$+ [(p+q) + (p+3q)] \cos (\theta + 2\phi) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ [p + (n-1) q + p + (n-3) q] \cos \{\theta + (n-2)\phi\}$$

$$+ [p + (n-2) q] \cos \{\theta + (n-1)\phi\}$$

$$+ \{p + (n-1)q\} \cos (\theta + n\phi)$$

अथवा

$$(2 \cos\phi)\, C = p \cos (\theta - \phi) + (p+q) \cos\theta + 2 (p+q) \cos (\theta + \phi)$$

$$+\ldots\ldots+2\{p+(n-2)q\}\cos\{\theta+(n-2)\phi\}$$
$$+\{p+(n-2)q\}\cos\{\theta+(n-1)\phi\}$$
$$+\{p+(n-1)q\}\cos\{\theta+n\phi\} \quad \ldots(3)$$

अब (3) को (1) के दुगने से घटाने पर

$$2(1-\cos\phi)\,C=-p\cos(\theta-\phi)+(p-q)\cos\theta$$
$$+(p+nq)\cos\{\theta+(n-1)\phi\}$$
$$+\{p+(n-1)q\}\cos(\theta+n\phi) \quad \ldots(4)$$

अब (4) से C का मान प्राप्त हो जायगा।

इसी प्रकार

$$2(1-\cos\phi)\,S=-p\sin(\theta-\phi)+(p-q)\sin\theta$$
$$+(p+nq)\cos\{\theta+(n-1)\phi\}$$
$$+\{p+(n-1)q\}\cos(\theta+n\phi).$$

उदाहरण

n पदों तक योग करो

1. $\sin\theta+x\sin(\theta+\phi)+x^2\sin(\theta+2\phi)+\ldots\ldots\ldots\ldots$

[इलाहाबाद, १९४६]

2. $1+\tan\theta\cos\theta+\frac{1}{2!}\tan^2\theta\cos 2\theta+\frac{1}{3!}\tan^3\theta\cos 3\theta+\ldots\ldots\ldots\ldots$

3. $\cos\theta+\frac{\sin\theta}{1}\cos 2\theta+\frac{\sin^2\theta}{1.2}\cos 3\theta+\ldots\ldots\ldots\ldots$

[आगरा, १९४१]

अनन्त तक योग करो

4. $\sin\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{3}\sin 3\theta-\ldots\ldots\ldots$

5. $x\sin\theta-\frac{x^2}{2}\sin 2\theta+\frac{x^3}{3}\sin 3\theta+\ldots\ldots$

[आगरा, १९४२]

6. $1+x\sin\theta+\frac{x^2}{2!}\sin 2\theta+\frac{x^3}{3!}\sin 3\theta+\ldots\ldots$

[इलाहाबाद, १९२४]

7. $\cos\theta-\frac{1}{3!}\cos(\theta+2\phi)+\frac{1}{5!}\cos(\theta+4\phi)-\ldots\ldots$

[बनारस, १९४६]

8. $\frac{1}{2!}\sin 2\theta+\frac{1}{4!}\sin 4\theta+\frac{1}{6!}\sin 6\theta+\ldots\ldots$

9. $\sin\theta-\frac{1}{3!}\sin 3\theta+\frac{1}{5!}\sin 5\theta-\ldots\ldots$

10. $\frac{\sin x}{\pi}-\frac{\sin 2x}{\pi^2}+\frac{\sin 3x}{\pi^3}-\ldots\ldots$

11. $1+\frac{1}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{2.4}\cos 4\theta+\frac{1.3}{2.4.6}\cos 6\theta-\ldots\ldots$

[लखनऊ, १९४५]

12. $1+\frac{1}{1!}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)+\frac{1}{2!}e^{2\cos\theta}.\cos(2\sin\theta)$
$+\ldots\ldots$

13. $a\sin\theta-\frac{1}{3}a^3\sin 3\theta+\frac{1}{5}a^5\sin 5\theta-\ldots\ldots$

[इलाहाबाद, १९४४]

14. यदि $C=\frac{1}{2!}\cos 2\theta+\frac{1}{4!}\cos 4\theta+\frac{1}{6!}\cos 6\theta+\ldots\ldots,$

तथा $S=\frac{1}{2!}\sin 2\theta+\frac{1}{4!}\sin 4\theta+\frac{1}{6!}\sin 6\theta+\ldots\ldots,$

तो सिद्ध करो

$$C^2+S^2=\{\cosh(\cos\theta-\cos(\sin\theta)\}^2.$$

९.०६ अतिपरबलयिक श्रेणियों का योग एवं घातीय मानों का प्रयोग—

अतिपरवलयिक sines तथा cosines की श्रेणियों को या तो हम वैसे ही योग कर सकते हैं या उनके घातीय मान की स्थानापत्ति करके। घातीय मान प्रयुक्त करने पर हमें e^x तथा e^{-x} की दो श्रेणियाँ प्राप्त होंगी जिनके योग अलग अलग ज्ञात किये जा सकते हैं।

कभी कभी हम sine अथवा cosine श्रेणियों में उनके घातीय मान रख देते हैं, जिससे हमें e^{ix} तथा e^{-ix} की दो श्रेणियाँ प्राप्त होती हैं। इनके योग पृथक् पृथक् निकाल लेते हैं।

उदाहरण १। अनन्त तक योग करो

$\cosh\theta-\frac{1}{2}\cosh 2\theta+\frac{1}{3}\cosh 3\theta-\ldots\ldots$ [इलाहाबाद, १९४६]

यदि दत्त श्रेणी को C से प्रकट करें तो

$$C=\tfrac{1}{2}\left[e^{\theta}+e^{-\theta}-\tfrac{1}{2}(e^{2\theta}+e^{-2\theta})+\tfrac{1}{3}(e^{3\theta}+e^{-3\theta})-\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}\left[e^{\theta}-\tfrac{1}{2}e^{2\theta}+\tfrac{1}{3}e^{3\theta}-\ldots\right]+\tfrac{1}{2}\left[e^{-\theta}-\tfrac{1}{2}e^{-2\theta}+\tfrac{1}{3}e^{-3\theta}-\ldots\ldots\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}\{\log(1+e^{\theta})+\log(1+e^{-\theta})\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\{\log(1+e^{\theta})(1+e^{-\theta})\}$$

$$=\tfrac{1}{2}[\log\{2+(e^{\theta}+e^{-\theta})\}]$$

$$=\tfrac{1}{2}\log(2+2\cosh\theta)$$

$$=\log(2(\cosh\theta/2)$$

उदाहरण २। अनन्त तक योग निकालो

$$1+\cos\theta\cdot\tan\theta+\frac{1}{2!}\cos 2\theta\tan^2\theta+\frac{1}{3!}\cos 3\theta\tan^3\theta+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

दत्त श्रेणी में घातीय मान रखने पर

$$= 1 + \tan\theta\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right) + \frac{1}{2!}\tan^2\theta\,\frac{(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta})}{2} + \dots\dots\dots,$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}\left[e^{i\theta}\tan\theta + \frac{1}{2!}e^{2i\theta}\tan^2\theta + \dots\dots\dots\right]$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left[e^{-i\theta}\tan\theta + \frac{1}{2!}e^{-2i\theta}\tan^2\theta + \dots\dots\right]$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}\left[e^{\tan\theta e^{i\theta}} - 1\right] + \tfrac{1}{2}\left[e^{\tan\theta\, e^{-i\theta}} - 1\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[e^{\tan\theta(\cos\theta + i\sin\theta)} + e^{\tan\theta(\cos\theta - i\sin\theta)}\right],$$

$$= e^{\tan\theta.\cos\theta}\left[\frac{e^{i\sin\theta\tan\theta} + e^{-i\sin\theta\tan\theta}}{2}\right],$$

$$= e^{\sin\theta}.\cos(\tan\theta\sin\theta).$$

उदाहरण

निम्न श्रेणियों का योग n पदों तक ज्ञात करो

1. $\sinh\theta + \sinh(\theta+\phi) + \sinh(\theta+2\phi) + \dots\dots\dots\dots.$
2. $\cosh\theta + \cosh(\theta+\phi) + \cosh(\theta+2\phi) + \dots\dots\dots\dots.$
3. $\text{sech}\,\theta\,\text{sech}\,2\theta + \text{sech}\,2\theta\,\text{sech}\,3\theta + \dots\dots\dots\dots.$
4. $\tanh\theta\,\text{sech}\,2\theta + \tanh 2\theta\,\text{sech}\,4\theta + \dots\dots\dots\dots + \tanh 2^{n-1}\theta\,\text{sech}\,2^n\theta.$

अनन्त तक योग करो

5. $\cosh\theta + \frac{\sin\theta}{1!}\cosh 2\theta + \frac{\sin^2\theta}{2!}\cosh 3\theta + \dots\dots.$

[इलाहाबाद, १९४८; बनारस, १९४९]

6. $1+\cosh\theta+\frac{1}{2!}\cosh 2\theta+\frac{1}{3!}\cosh 3\theta+\ldots\ldots$

[आगरा १९५१]

7. $x\cosh\theta-\frac{x^2}{2}\cosh 2\theta+\frac{x^3}{3}\cosh 3\theta-\ldots\ldots$

९.०७ **अवकलन तथा समाकलन की विधि**—हम किसी परिमित श्रेणी के प्रत्येक पद का अवकलन अथवा समाकलन कर सकते हैं। अतएव यदि एक परिमित श्रेणी का योग ज्ञात हो, तो योग को तथा श्रेणी के प्रत्येक पद को अवकलित या समाकलित करके हम इस प्रकार प्राप्त श्रेणियों का योग ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण १। सिद्ध करो

$$\left\{\sin\theta/\sin\frac{\theta}{2^n}\right\}=2^n\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\ldots\ldots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right),$$

तथा इसकी सहायता से सिद्ध करो

$$\text{(i)}\ \log\frac{\sin\theta}{\theta}=\log\cos\frac{\theta}{2}+\log\cos\frac{\theta}{2^2}+\log\cos\frac{\theta}{2^3}+\ldots\ldots \text{अनन्ततक}$$

[इलाहाबाद, १९५१]

$$\text{(ii)}\ \frac{1}{\theta}-\cot\theta=\tfrac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{\theta}{2^2}+\ldots\ldots$$

हमें विदित है कि

$$\sin\theta=2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2},$$

$$=2^2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\sin\frac{\theta}{2^2},$$

$$=2^3\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cos\frac{\theta}{2^3}\sin\frac{\theta}{2^3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=2^n \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cos\frac{\theta}{2^3}\ldots\cos\frac{\theta}{2^n}.\sin\frac{\theta}{2^n}.$$

अतः $\left[\sin\theta/\sin\frac{\theta}{2^n}\right]=2^n\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\ldots\cos\frac{\theta}{2^n}.$

हमें ज्ञात है कि $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1,$

अब क्योंकि $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\theta}{2^n}\to 0,$ इसलिये

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}}=1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}\right]=\frac{\sin\theta}{\theta}.$$

अतः $\frac{\sin\theta}{\theta}=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cos\frac{\theta}{2^3}\ldots\ldots\ldots$ अनन्त तक।

(i) अब दोनों पक्ष का लघु गुणक लेने पर

$$\log\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)=\log\cos\frac{\theta}{2}+\log\cos\frac{\theta}{2^2}+\log\cos\frac{\theta}{2^3}+\ldots\ldots\ldots$$

(ii) उपर्युक्त श्रेणी को अवकलित करने पर

$$-\frac{1}{\theta}+\cot\theta=-\tfrac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2^2}\tan\frac{\theta}{2^2}-\frac{1}{2^3}\tan\frac{\theta}{2^3}-\ldots\ldots.$$

जिससे $\frac{1}{\theta} - \cot\theta = \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2^2}\tan\frac{\theta}{2^2} + \frac{1}{2^3}\tan\frac{\theta}{2^3}$
$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$

इस परिणाम के पुनः अवकलन से क्या फल प्राप्त होगा ?

उदाहरण २। सिद्ध करो

$\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta + \ldots\ldots$ अनन्त तक $= (\frac{1}{2} - x)\pi$,

जहाँ $x = \frac{\theta}{2\pi}$, तथा x का मान 0 तथा 1 के बीच में है।

समाकलन से निम्न परिणाम प्राप्त करो

$\cos\theta + \frac{1}{2^2}\cos 2\theta + \frac{1}{3^2}\cos 3\theta + \ldots\ldots\ldots\ldots$ अनन्त तक
$= (x^2 - x + \frac{1}{6})\pi^2.$

निम्न का मान निकालो

$\sin\theta + \frac{1}{2^3}\sin 2\theta + \frac{1}{3^3}\sin 3\theta + \ldots\ldots\ldots$ अनन्त तक।

[उत्तर प्रदेश सिविल सर्विस, १९५०]

मान लें

$S = \sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$,

एवं $C = \cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

तब $C + iS = e^{i\theta} + \frac{1}{2}e^{2i\theta} + \frac{1}{3}e^{3i\theta} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= -\log(1 - e^{i\theta})$

$= -\log(1 - \cos\theta - i\sin\theta)$

$$= -\left[\frac{1}{2}\log\{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\} - i\tan^{-1}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right]$$

जिससे $S = \tan^{-1}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \tan^{-1}\left(\cot\frac{\theta}{2}\right)$

$$= \tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

$$=\pi\left(\tfrac{1}{2}-\frac{\theta}{2\pi}\right)=\pi\left(\tfrac{1}{2}-x\right).$$

जहाँ $\dfrac{\theta}{2\pi}=x.$

अतएव $\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{3}\sin 3\theta+\ldots\ldots=\pi\left(\frac{1}{2}-x\right)$

अब दोनों पक्षों का θ के अपेक्षया समाकलन करने पर

$$\cos\theta+\frac{1}{2^2}\cos 2\theta+\frac{1}{3^2}\cos 3\theta+\ldots\ldots\ldots$$

$$=-\pi\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta^2}{2^2\pi}\right)+A,$$

जहाँ A समाकलन का स्थिरांक है। इसे ज्ञात करने के लिये $\theta=0$ रखने पर

$$A=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

अतएव $\cos\theta+\dfrac{1}{2^2}\cos 2\theta+\dfrac{1}{3^2}\cos 3\theta+\ldots\ldots\ldots$

$$=\pi^2\left(x^2-x+\tfrac{1}{6}\right).$$

इस परिणाम का पुनः समाकलन करने पर

$\sin\theta+\dfrac{1}{2^3}\sin 2\theta+\dfrac{1}{3^3}\sin 3\theta+\ldots\ldots\ldots$ अनन्त तक

$$=\pi^2\int\left(x^2-x+\tfrac{1}{6}\right)\frac{d\theta}{dx}\,dx+B$$

$$=2\pi.\pi^2\int\left(x^2-x+\tfrac{1}{6}\right)dx+B$$

$$=2\pi^3\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}\right]+B$$

जहाँ $\dfrac{d\theta}{dx}=2\pi$, तथा B भी स्थिरांक है। इसे ज्ञात करने के लिये $\theta=0$ रखने पर उपर्युक्त से हमें प्राप्त होता है कि $B=0.$

अतएव $\sin\theta+\dfrac{1}{2^3}\sin 2\theta+\dfrac{1}{3^3}\sin 3\theta+\ldots\ldots\ldots$ अनन्त तक

$$=2\pi^3\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}\right)$$

$$=\frac{x\pi^3}{3}\left(2x^2-3x+1\right).$$

उदाहरण

निम्न का n पदों तक योग ज्ञात करो

1. $\operatorname{cosec} 2\theta+\operatorname{cosec} 4\theta+\operatorname{cosec} 8\theta+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$,
इसके समाकलन से सिद्ध करो कि

$$2 \operatorname{cosec} 2\theta \cot 2\theta+4 \operatorname{cosec} 4\theta \cot 4\theta+\ldots\ldots\ldots\ldots = \operatorname{cosec}^2\theta-2^n \operatorname{cosec}^2 (2^n\theta).$$

2. $\sin\theta+3 \sin 3\theta+5 \sin 5\theta+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\cos\theta+3 \cos 3\theta+5 \cos 5\theta+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

4. $3 \sin\theta+5 \sin 2\theta+7 \sin 3\theta+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

[इलाहाबाद, १९२७; बनारस, १९४८]

5. $2 \cos\theta+4 \cos 3\theta+6 \cos 5\theta+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

6. $3.1. \sin\theta+5.2. \sin 2\theta+7.3. \sin 3\theta+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

अध्याय ९ पर उदाहरण

योग करो

1. $\frac{1}{2} \sec\theta+\frac{1}{2^2} \sec\theta \sec 2\theta+\frac{1}{2^3} \sec\theta \sec 2\theta \sec 2^2\theta$

$+\ldots\ldots n$ पदों तक।

[संकेत —$u_1=\sin\theta \{\cot\theta-\cot 2\theta\}$]

2. $\sin^2\theta+\frac{1}{3!} \sin^3\theta \sin 3\theta+\frac{1}{5!}\sin^5\theta \sin 5\theta+\ldots\ldots$

अनन्त तक।

3. $\sin\theta \cos\theta+\frac{1}{3!} \sin^3\theta \cos 3\theta+\frac{1}{5!} \sin^5\theta \cos 5\theta$

$+\ldots\ldots$ अनन्त तक।

[यू० पी० सिविल सर्विस, १९४८]

4. $\tan^{-1} \frac{1}{2.1^2}+\tan^{-1} \frac{1}{2.2^2}+\tan^{-1} \frac{1}{2.3^2}$

$+\ldots\ldots\ldots\ldots n$ पदों तक।

[बनारस, १९५०]

5. $\cot^{-1}\left(\frac{2}{a}+a\right)+\cot^{-1}\left(\frac{2}{a}+3a\right)+\cot^{-1}\left(\frac{2}{a}+6a\right)$
$+\cot^{-1}\left(\frac{2}{a}+10a\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots$ n पदों तक।

6. $\cot^{-1}\left(\frac{1^2}{8}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{2^2}{8}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{3^2}{8}\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots$
$+\ldots\ldots\ldots\ldots$ n पदों तक।

7. $\tan^{-1}\left(\frac{2}{1^2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2}{2^2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2}{3^2}\right)$
$+\ldots\ldots\ldots\ldots$ n पदों तक

8. $\operatorname{cosec}^2\theta+\operatorname{cosec}^2(\theta+2\pi/n)+\operatorname{cosec}^2(\theta+4\pi/n)+\ldots$
$+\ldots\ldots$ n पदों तक। [इलाहाबाद, १९२५]

9. $\cos\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{3}+\ldots\ldots$ अनन्त तक।

[आगरा, १९४०; बनारस, १९४७]

10. $\frac{\cos\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos 2\theta}{2!\,\cos^2\theta}+\frac{\cos 3\theta}{3!\,\cos^3\theta}+\ldots\ldots$ अनन्त तक।

[यू॰ पी॰ सिविल सर्विस, १९४८]

11. $\frac{5\cos\theta}{1!}+\frac{7\cos 3\theta}{3!}+\frac{9\cos 5\theta}{5!}+\ldots\ldots$ n पदों तक

[बनारस, १९५१]

12. $\sin\theta\sin 2\theta\sin 3\theta+\sin 2\theta\sin 3\theta\sin 4\theta+$
$\sin 3\theta\sin 4\theta\sin 5\theta+\ldots\ldots\ldots\ldots$ n पदों तक।

13. $\frac{1}{3!}\cos 3\theta+\frac{1}{7!}\cos 7\theta+\frac{1}{11!}\cos 11\theta+\ldots$ अनन्त तक।

14. $\sin^4\theta+\sin^4(\theta+2\pi/n)+\sin^4(\theta+4\pi/n)$
$+\ldots\ldots\ldots\ldots$ n पदों तक।

[आगरा, १९४४]

15. $\sin^2\theta\cos^2\theta-\frac{1}{2}\sin^4\theta\cos^2 2\theta+\frac{1}{4}\sin^8\theta\cos^2 4\theta-\ldots$
$+\ldots$ अनन्त तक। [बनारस, १९५१]

16. सिद्ध करो कि

$$\cos^4\theta+\cos^4(\theta+2\pi/n)+\cos^4(\theta+4\pi/n)+\ldots\ldots \; n \text{ पदों तक } = \frac{3n}{8}$$

17. सिद्ध करो कि

$$\sinh\theta+n\sinh 2\theta+\frac{n(n-1)}{1.2}\sinh 3\theta+\ldots\ldots\ldots\ldots (n+1) \text{ पदों तक}$$
$$=2^n\cosh^n(\theta/2)\sinh n(1+\theta/2)$$

18. यदि

$$C=\cos\theta+2\cos 2\theta+3\cos 3\theta+\ldots\ldots+\ldots n\cos n\theta,$$

तथा $S=\sin\theta+2\sin 2\theta+3\sin 3\theta+\ldots\ldots\ldots+n\sin n\theta,$

तो सिद्ध करो

$$C=\tfrac{1}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{\theta}{2}\{-1+(n+1)\cos n\theta-n\cos(n+1)\theta\},$$

एवं $S=\tfrac{1}{4}\operatorname{cosec}^2\dfrac{\theta}{2}\{(n+1)\sin n\theta-n\sin(n+1)\theta\}.$

19. सिद्ध करो कि

(i) $\sin\theta\sec 3\theta+\sin 3\theta\sec 3^2\theta+\sin 3^2\theta\sec 3^3\theta+\ldots\ldots n \text{ पदों तक } =\tfrac{1}{2}[\tan(3^n\theta)-\tan\theta].$

तथा (ii) $\sin\theta\sec 3\theta+\sin\dfrac{\theta}{3}\sec\theta+\sin\dfrac{\theta}{3^2}\sec\dfrac{\theta}{3}+\ldots\ldots+n \text{ पदों तक}=\tfrac{1}{2}\left\{\tan 3\theta-\tan\dfrac{\theta}{3^{n-1}}\right\}.$

20. $2n$ पदों तक योग निकालो

$$\tan\theta+\cot\theta+\tan 2\theta+\cot 2\theta+\tan 4\theta+\cot 4\theta+\ldots\ldots$$

21. सिद्ध करो कि श्रेणी

$$\tan\frac{\theta}{2}\sec\theta+\tan\frac{\theta}{2^2}\sec\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\theta}{2^3}\sec\frac{\theta}{2^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

अभिसारी है एवं अनन्त तक इसका योग $\tan\theta$ है ।

[यू० पी० सिविल सर्विस, १९४१]

22. $\sin^4\alpha+\sin^4 2\alpha+\sin^4 3\alpha+$ .... n पदों तक।

23. दिखाओ कि

$$\tan n\theta=\frac{\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta+\ldots\ldots n \text{ पदों तक}}{\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 5\theta+\ldots\ldots n \text{ पदों तक}}.$$

24. श्रेणी का n पदों तक योग निकालो

$\sin(p+1)\theta\cos\theta+\sin(p+2)\theta\cos 2\theta+$............

निम्न श्रेणियों का n पदों तक योग निकालो

25. $\operatorname{cosec} x+\operatorname{cosec} 2x+\operatorname{cosec} 4x+\operatorname{cosec} 8x+$..........

26. $\tan x+\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+$................

27. $c\sin(\alpha+\beta)+\frac{c^2}{2}\sin(\alpha+2\beta)+\frac{c^3}{3}\sin(\alpha+3\beta)$

$+$ ......अनंत तक।

28. $c\cos(\alpha+\beta)+\frac{c^2}{2}\cos(\alpha+2\beta)+\frac{c^3}{3}\cos(\alpha+3\beta)$

$+$ ....अनंत तक।

29. $\sin\alpha\sin 3\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2^2}\sin\frac{3\alpha}{2^2}$

$+$ ......n पदों तक।

30. $\frac{1}{2}\log\tan 2\theta+\frac{1}{2^2}\log\tan 2^2\theta+\frac{1}{2^3}\log\tan 2^3\theta$

$+$ ......n पदों तक।

अध्याय १०

गुणनखंड

१०.०१ $\sin\theta$ के गुणनखंड ज्ञात करना—

हमें विदित है कि

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right) \qquad \ldots\ldots (1)$$

अव यदि हम (1) में θ के स्थान में $\frac{\theta}{2}$ तथा $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$

क्रमशः रखें तो

$$\sin\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2^2}\right),$$

$$= 2\sin\frac{\theta}{2^2}\sin\left(\frac{2\pi}{2^2}+\frac{\theta}{2^2}\right).$$

तथा $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2^2}+\frac{\theta}{2^2}\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2^2}+\frac{\theta}{2^2}\right),$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{2^2}+\frac{\theta}{2^2}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2^2}+\frac{\theta}{2^2}\right).$$

अव (1) में $\sin\frac{\theta}{2}$ तथा $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$ के मान रखने पर

हमें प्राप्त होता है

$$\sin\theta = 2^3\sin\frac{\theta}{2^2}\sin\left(\frac{\pi+\theta}{2^2}\right)\sin\left(\frac{2\pi+\theta}{2^2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{3\pi+\theta}{2^2}\right).$$

इस प्रकार सूत्र (1) का बार बार प्रयोग करने पर हमें निम्न फल प्राप्त होते हैं।

$$\sin\theta = 2^7 \sin\frac{\theta}{2^3} \sin\left(\frac{\pi+\theta}{2^3}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \sin\left(\frac{7\pi+\theta}{2^3}\right),$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 2^{p-1} \sin\frac{\theta}{p} \sin\left(\frac{\pi+\theta}{p}\right) \sin\left(\frac{2\pi+\theta}{p}\right) \ldots\ldots$$

$$\sin\left\{\frac{(p-1)\pi+\theta}{p}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

जहाँ p, 2 के किसी घात के मान के बराबर है

जैसे $p=2^n$.

(2) का अन्तिम गुणन खंड $= \sin\left\{\frac{(p-1)\,\pi+\theta}{p}\right\},$

$$= \sin\left\{\pi - \frac{(\pi-\theta)}{p}\right\},$$

$$= \sin\left(\frac{\pi-\theta}{p}\right)$$

अन्त से दूसरा गुणन खंड $= \sin\left\{\frac{(p-2)\pi+\theta}{p}\right\},$

$$= \sin\left\{\pi - \frac{(2\pi-\theta)}{p}\right\},$$

$$= \sin\left(\frac{2\pi-\theta}{p}\right).$$

इसी प्रकार और भी गुणन खंडों का मान ज्ञात कर सकते हैं।

प्रारंभ से $\left(\frac{p}{2}+1\right)$ *th* गुणन खंड का मान

$$= \sin\left(\frac{\frac{p}{2}\cdot\pi+\theta}{p}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{p}\right) = \cos\frac{\theta}{p}.$$

अब (2) के गुणनखंडों को युग्म के रूप में इस प्रकार रखा कि द्वितीय और अंतिम एक साथ, तृतीय और अन्त से दूसरा एक साथ आदि। इस प्रकार से प्रथम और $\left(\frac{p}{2}+1\right)$ गुणनखंड ही अकेले बचेंगे शेष सब युग्मों में हो जायेंगे और (2) को निम्न रूप प्राप्त होगा।

$$\sin\theta = 2^{p-1}\sin\frac{\theta}{p}\left\{\sin\frac{\pi+\theta}{p}\,.\,\sin\frac{\pi-\theta}{p}\right\}$$

$$\left\{\sin\frac{2\pi+\theta}{p}\,.\,\frac{2\pi-\theta}{p}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\cos\frac{\theta}{p}$$

$$= 2^{p-1}\sin\frac{\theta}{p}\left\{\sin^2\frac{\pi}{p}-\sin^2\frac{\theta}{p}\right\}$$

$$\left\{\sin^2\frac{2\pi}{p}-\sin^2\frac{\theta}{p}\right\}\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\left\{\frac{\sin^2\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi}{p}-\sin^2\frac{\theta}{p}\right\}\cos\frac{\theta}{p}\quad\ldots(3)$$

(3) के दोनों पक्षों को $\sin\frac{\theta}{p}$ से भाग दिया और θ के मान को इतना कम किया कि $\theta\to 0$, तो

$$p = 2^{p-1}\sin^2\frac{\pi}{p}\;\sin^2\frac{2\pi}{p}\;\sin^2\frac{3\pi}{p}\;\ldots\ldots\ldots$$

$$\sin^2\frac{(p/2-1)\pi}{p}\quad\ldots\ldots\ldots(4)$$

क्योंकि हम जानते हैं कि जब $\theta\to 0$ तो

$$\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{p}} = p.\frac{\sin\theta}{\theta}\,.\,\frac{\theta/p}{\sin\frac{\theta}{p}} = p \text{ तथा } \cos\frac{\theta}{p} = 1$$

अब (3) को (4) से भाग देने पर

$$\sin\theta = \sin\frac{\theta}{p}\left\{1-\frac{\sin^2\theta/p}{\sin^2\pi/p}\right\}\left\{1-\frac{\sin^2\theta/p}{\sin^2 2\pi/p}\right\}\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\left\{1-\frac{\sin^2\theta/p}{\sin^2\frac{(p/2-1)\pi}{p}}\right\}\cos\frac{\theta}{p}\qquad\ldots\ldots(5)$$

यदि p का अनंत मान लें तो

$$\left[p\sin\frac{\theta}{p}\right]_{p\to\infty}=\left[\frac{\sin\theta/p}{\theta/p}\theta\right]_{p\to\infty}=\theta,$$

$$\left[\frac{\sin^2\theta/p}{\sin^2\pi/p}\right]_{p\to\infty}=\left[\frac{\sin^2\theta/p}{\theta^2/p^2}\cdot\frac{\pi^2/p^2}{\sin^2\pi/p}\cdot\frac{\theta^2}{\pi^2}\right]_{p\to\infty}=\frac{\theta^2}{\pi^2}$$

इसी प्रकार अन्य पदों का मान निकाला जा सकता है इसलिये जब p का अनंत मान लें तो (5) का निम्न रूप होगा

$$\sin\theta=\theta\left(1-\frac{\theta^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{3^2\pi^2}\right)$$

$\ldots\ldots$ अनंत तक,

$$=\theta\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\theta^2}{n^2\pi^2}\right).$$

जहाँ Π गुणनफल के लिये प्रयोग किया गया है।

इस प्रकार $\sin\theta$ को एक अनंत गुणनफल के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

१०.०२ $\cos\theta$ के गुणन खंड ज्ञात करना—

§ १०.०१ के समीकरण (२) में θ के स्थान पर $\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ रखने पर हमें निम्न फल प्राप्त होता है।

$$\cos\theta=2^{p-1}\sin\left(\frac{\pi+2\theta}{2p}\right)\sin\left(\frac{3\pi+2\theta}{2p}\right)\sin\left(\frac{5\pi+2\theta}{2p}\right)\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\sin\left[\frac{(2p-1)\pi+2\theta}{2p}\right\}\ldots\ldots(1)$$

समीकरण (1) का अन्तिम गुणनखंड

$$=\sin\left[\frac{(2p-1)\pi+2\theta}{2p}\right]$$

$$= \sin\left\{\pi - \frac{(\pi-2\theta)}{2p}\right\}$$

$$= \sin\left(\frac{\pi-2\theta}{2p}\right).$$

अंत से द्वितीय गुणनखंड $= \sin\left\{\frac{(2p-3)\pi+2\theta}{2p}\right\}$

$$= \sin\left\{\pi - \frac{(3\pi-2\theta)}{2p}\right\}$$

$$= \sin\left(\frac{3\pi-2\theta}{p}\right).$$

इसी प्रकार अन्य गुणनखंडों का मान भी ज्ञात कर सकते हैं। समीकरण (1) के खंडों को युग्मों में इस प्रकार रखा कि प्रथम और अंतिम एक साथ, द्वितीय और अंत से दूसरा एक साथ आदि। इस प्रकार (1) का निम्न रूप प्राप्त होगा।

$$\cos\theta = 2^{p-1}\left\{\sin\frac{\pi+2\theta}{2p}.\ \sin\frac{\pi-2\theta}{2p}\right\}$$

$$\left\{\sin\frac{3\pi+2\theta}{2p}.\sin\frac{3\pi-2\theta}{2p}\right\}\ldots\ldots$$

$$= 2^{p-1}\left\{\sin^2\frac{\pi}{2p} - \sin\frac{2\theta}{2p}\right\}$$

$$\left\{\sin^2\frac{3\pi}{2p} - \sin^2\frac{2\theta}{2p}\right\}\ \ldots\ldots\ (2)$$

अव (2) में θ के मान को इतना कम किया कि $\theta \to 0$, तो हमको निम्न फल प्राप्त होगा

$$1 = 2^{p-1}\sin^2\frac{\pi}{2p}\sin^2\frac{3\pi}{2p}\sin^2\frac{5\pi}{2p}\ldots\ldots\ \ldots\ldots(3)$$

(2) को (3) से भाग देने पर हमें प्राप्त होता है

$$\cos\theta = \left\{1 - \frac{\sin^2\frac{2\theta}{2p}}{\sin^2\frac{\pi}{2p}}\right\}\left\{1 - \frac{\sin^2\frac{2\theta}{2p}}{\sin^2\frac{3\pi}{2p}}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\left\{1-\frac{\sin^2\dfrac{2\theta}{2p}}{\sin^2\dfrac{(p-1)\pi}{2p}}\right\}\ldots.\ (4)$$

यदि p का अनंत मान लें तो (4) का निम्न रूप होगा

$$\cos\theta=\left(1-\frac{4\theta^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4\theta^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4\theta^2}{5^2\pi^2}\right)\ldots.\text{अनंत तक ।}$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{4\theta^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right].$$

इस प्रकार $\cos\theta$ को भी एक अनंत गुणनफल के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

क्योंकि $\cos\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{2\sin\theta}$,

अत: $\cos\theta$ के गुणनखंड $\sin 2\theta$ और $\sin\theta$ के गुणनखंडों द्वारा भी ज्ञात कर सकते हैं।

टिप्पणी—हम $\sin\theta$ के गुणनखंड एक अन्य प्रकार से भी ज्ञात कर सकते हैं। हमें विदित है कि समीकरण

$$\sin\theta=0,$$

के मूल $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots\ldots, \pm p\pi, \ldots\ldots\ldots$ हैं। अत:

$$\theta, \left(1+\frac{\theta}{\pi}\right)\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right), \left(1+\frac{\theta}{2\pi}\right).\left(1-\frac{\theta}{2\pi}\right), \ldots\ldots\ldots$$

$$\left(1+\frac{\theta}{n\pi}\right)\left(1-\frac{\theta}{n\pi}\right), \quad \ldots\ldots$$

$\sin\theta$ के गुणन खंड होंगे। यदि k एक स्थिरांक हो, तो

$$\sin\theta=k\theta\left(1-\frac{\theta^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{2^2\pi^2}\right)\ldots.\left(1-\frac{\theta^2}{n^2\pi^2}\right)$$

.... अनन्त तक ।

अब k का मान ज्ञात करने के लिये दोनों पक्षों को θ से भाग दिया और θ का मान इतना कम किया कि $\theta \to 0$, तब

$$\left[\frac{\sin}{\theta}\right]_{\theta \to 0} = k \; .$$

परन्तु $\left[\frac{\sin\theta}{\theta}\right]_{\theta \to 0} = 1$; अर्थात् $k = 1$.

$$\text{अतः} \quad \sin\theta = \theta \left(1 - \frac{\theta^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\theta^2}{2^2\pi^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{\theta^2}{n^2\pi^2}\right)\ldots$$

$$= \theta \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\theta^2}{n^2\pi^2}\right),$$

जैसा कि हम पहले § १०.०१ में ज्ञात कर चुके हैं।

इसी प्रकार $\cos\theta = 0$ के मूल ज्ञात करके $\cos\theta$ को भी एक अनंत गुणन फल के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

१०.०३ $\sinh\theta$ तथा $\cosh\theta$ को गुणनफल के रूप में व्यक्त करना—

हमें विदित है कि

$$\sinh\theta = \frac{1}{i}\sin(i\theta) = -i\sin(i\theta),$$

तथा $\cosh\theta = \cos(i\theta)$.

$$\therefore \sinh\theta = (-i)(i\theta)\left(1 - \frac{(i\theta)^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{(i\theta)^2}{2^2\pi^2}\right)$$

......अनन्त तक

जो कि $\sin\theta$ के गुणनखंडों में θ के स्थान पर $(i\theta)$ रखकर प्राप्त होता है

$$\therefore \sinh\theta = \theta\left(1 + \frac{\theta^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{\theta^2}{2^2\pi^2}\right)\ldots \text{अनन्त तक।} \qquad \ldots(1)$$

इसी प्रकार $\cos\theta$ के गुणनखंडों में θ के स्थान पर $(i\theta)$ रखने पर $\cosh\theta$ को गुणनखंडों के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

$$\therefore \cosh\theta = \left(1 - \frac{4(i\theta)^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4(i\theta)^2}{3^2\pi^2}\right)$$

......अनन्त तक,

$$=\left(1+\frac{4\theta^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4\theta^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots\ldots \text{अनन्त तक।}$$

..(2)

१०.०४ प्राकृतिक संख्याओं के व्युत्क्रम के घातों का योग—

हमें विदित है कि

$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\ldots\ldots$$

$$\therefore \frac{\sin\theta}{\theta}=1-\frac{\theta^2}{3!}+\frac{\theta^4}{5!}\ldots\ldots \quad \text{अनन्त तक (1)}$$

तथा § १०.०१ से विदित है कि

$$\frac{\sin\theta}{\theta}=\left(1-\frac{\theta^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{2^2\pi^2}\right)\ldots\ldots \quad \text{अनन्त तक (2)}$$

अतः (1) तथा (2) से

$$1-\left(\frac{\theta^2}{3!}-\frac{\theta^4}{5!}+\ldots\right)=\left(1-\frac{\theta^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\theta^2}{2^2\pi^2}\right)\ldots\ldots\ldots$$

दोनों पक्षों का लघुगुणक लेने के पश्चात् श्रेणी में विस्तार किया तथा (-1) से भाग देने पर

$$\left(\frac{\theta^2}{3!}-\frac{\theta^4}{5!}+\ldots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\theta^2}{3!}-\frac{\theta^4}{5!}+\ldots\right)^2+\ldots$$

$$=\left(\frac{\theta^2}{\pi^2}+\frac{1}{2}\frac{\theta^4}{\pi^4}+\ldots\right)+\left(\frac{\theta^2}{2^2\pi^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta^4}{2^4\pi^4}+\ldots\ldots\right)+\ldots\ldots$$

अर्थात् $\frac{1}{6}\theta^2+\theta^4\left(\frac{1}{72}-\frac{1}{120}\right)+\ldots\ldots=$

$$\frac{\theta^2}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\ldots\right]$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\theta^4}{\pi^4}\left[\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots\ldots\right]$$

$$+\ldots\ldots$$

अब θ के एक से ही घातों के गुणांको को दोनों पक्षों से वरावर करने पर

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\ldots\right)$$

$$\frac{1}{180}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots\ldots\frac{1}{n^4}+\ldots\ldots\right)$$

अर्थात निम्न फल प्राप्त होते हैं

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\ldots \text{ अनंत तक,}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

तथा $$\frac{\pi^4}{90}=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n^4}+\ldots\ldots \text{ अनन्त तक}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

इसी प्रकार $\cos\theta$ के मान लेने पर

$$\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\ldots\ldots=\left(1-\frac{4\theta^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4\theta^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots\ldots\ldots$$

अब दोनों पक्षों का लघुगुणक लेकर श्रेणी में विस्तार किया और (-1) से भाग देने पर

$$\left(\frac{\theta^2}{2!}-\frac{\theta^4}{4!}+\ldots\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\theta^2}{2!}-\frac{\theta^4}{4!}+\ldots\right)^2+\ldots\ldots\ldots$$

$$=\left(\frac{2^2\theta^2}{\pi^2}+\frac{1}{2}\frac{2^4\theta^4}{\pi^4}+\ldots\ldots\right)+\left(\frac{2^2\theta^2}{3^2\pi^2}+\frac{1}{2}\frac{2^4\theta^4}{3^4\pi^4}+\ldots\right)+\ldots\ldots$$

अर्थात् $\frac{1}{2}\theta^2+\theta^4\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{24}\right)+\dots\dots\dots\dots\dots$

$$=\frac{2^2\theta^2}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\dots\right]+\frac{1}{2}\cdot\frac{2^4\theta^4}{\pi^4}$$

$$\left[\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\dots\right)+\dots\dots\dots$$

अव θ के एक से घातों के गुणांकों को दोनों पक्षों में वरावर रखने पर

$$\frac{1}{2}=\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots\dots\dots\right)$$

तथा $$\frac{1}{12}=\frac{8}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}\dots\dots\dots\right)$$

अर्थात निम्न फल प्राप्त होते हैं

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots\dots\dots\dots \text{ अनंत तक,}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\,.$$

तथा $$\frac{\pi^4}{96}=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\dots\dots\dots\dots \text{ अनंत तक,}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\,.$$

उदाहरण १। सिद्ध करो कि

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\dots\dots\dots\dots \text{ अनंत तक ।}$$

यदि § १०.०१ में प्राप्त $\sin\theta$ के अनंत गुणनफल में $\theta=\pi/2$ रखें तो हमें निम्न फल प्राप्त होगा

$$1=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{6^2}\right)\dots\dots\dots$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdots\cdots$$

अतः $\dfrac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots\cdots$ अनंत तक

यह वॉलिस प्रमेय कहलाता है। इसे निम्न रूप में भी लिख सकते हैं। यदि n का मान बहुत अधिक हो तो

$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1.3}{2^2} \cdot \frac{3.5}{4^2} \cdot \frac{5.7}{6^2} \cdots\cdots \frac{(2n-1)\ (2n+1)}{(2n)^2}.\ \text{(लगभग)}$$

अर्थात् $$\frac{2^2.4^2.5^2 \cdots\cdots (2n)^2}{1^2.3^2.5^2 \cdots\cdots (2n-1)^2} = \frac{\pi}{2}(2n+1),\ \text{(लगभग)}$$

या $$\frac{2.4.6 \cdots\cdots (2n)}{1.3.5 \cdots\cdots (2n-1)} = \sqrt{\left\{\frac{\pi}{2}\ (2n+1)\right\}}.$$

(लगभग) .... (1)

हमें विदित है कि

$$\left[\sqrt{\left(\frac{2n+1}{2n}\right)}\right]_{n\to\infty} = 1.$$

$$\therefore \left[\sqrt{\left\{\tfrac{1}{2}\ (2n+1)\right\}}\right]_{n\to\infty} = \sqrt{n}\ \text{(लगभग)}$$

$\therefore$ अतः (1) से

$$\sqrt{\pi} = \frac{2.4.6 \cdots\cdots 2n}{1.3.5 \cdots\cdots (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

उदाहरण २। सिद्ध करो कि

$$\cot\theta = \frac{1}{\theta} - \frac{2\theta}{\pi^2 - \theta^2} - \frac{2\theta}{2^2\pi^2 - \theta^2} - \cdots\cdots \text{ अनंत तक}$$

$$= \frac{1}{\theta} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\theta}{n^2\pi^2 - \theta^2}\right).$$

हमें विदित है कि

$$\sin\theta=\theta \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{\theta^2}{n^2\pi^2}\right).$$

यदि θ, π का गुणज नहीं है, उस दशा में लघुगुणक लेने पर

$$\log \sin \theta = \log \theta + \sum \log \left(1-\frac{\theta^2}{n^2\pi^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

अब यदि θ के स्थान पर $(\theta+t)$ रखा तो

$$\log \sin (\theta+t)=\log (\theta+t)+\sum \log \left\{1-\frac{(\theta+t)^2}{n^2\pi^2}\right\}. \quad \ldots\ldots(2)$$

(2) में से (1) को घटाने पर हमें प्राप्त है

$$\log \frac{\sin (\theta+t)}{\sin \theta} = \log \left(\frac{\theta+t}{\theta}\right) + \sum \log \left\{\frac{n^2\pi^2-(\theta+t)^2}{n^2\pi^2-\theta^2}\right\} \quad \ldots\ldots(3)$$

समीकरण (3) का वाम पक्ष $= \log \dfrac{\sin (\theta+t)}{\sin \theta}$

$$= \log \frac{\sin\theta \cos t+\cos\theta \sin t}{\sin \theta}$$

$$= \log (\cos t+\sin t \cot\theta)$$

$$= \log \left[1-\frac{t^2}{2!}+\ldots.+\cot\theta \left(t-\frac{t^3}{3!}+\ldots. + \ldots\ldots\right)\right]$$

$$= \log (1+t \cot \theta+\ldots\ldots\ldots)$$

$= t\cot\theta+$ (t के उच्च घातीय पद) ।

समीकरण (3) का दाहिना पक्ष

$$= \log \left(1+\frac{t}{\theta}\right)+\sum \log \left\{1-\frac{2\theta t}{n^2\pi^2-\theta^2}-\frac{t^2}{n^2\pi^2-\theta^2}\right\}$$

$$= \frac{t}{\theta} - t.\sum \frac{2\theta}{n^2\pi^2 - \theta^2} + \{ t \text{ के उच्च घातीय पद} \}.$$

अब समीकरण (3) के दोनों पक्षों में t के गुणांकों को बराबर रखने पर हमें प्राप्त होता है

$$\cot\theta = \frac{1}{\theta} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta}{n^2\pi^2 - \theta^2}.$$

टिप्पणी—इस उदाहरण को हम $\sin\theta$ के अनंत गुणनखंड का लघुगुणक लेकर और फिर अवकल गुणांक ज्ञात करके भी निकाल सकते हैं।

उदाहरण

सिद्ध करो कि

1. $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \ldots$ अनंत तक $= \frac{\pi^2}{12}$.

2. $\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \ldots\ldots\ldots$ अनंत तक $= \frac{\pi^6}{945}$.

3. $\frac{1}{3^4} + \frac{3}{5^4} + \frac{6}{7^4} + \frac{10}{9^4} + \ldots$ अनंत तक

$$= \frac{\pi^2}{64}\left(1 - \frac{\pi^2}{12}\right).$$

4. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.6} + \ldots$ अनंत तक $= \frac{\pi^2}{12}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{3} - 3.$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(n+1)^3} = 10 - \pi^2.$

7. $\frac{2}{1^4}+\frac{5}{2^4}+\frac{10}{3^4}+\frac{17}{4^4}+\ldots$ अनंत तक

$$=\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^4}{90}.$$

8. $\left(\frac{1}{1.2.3}\right)^2+\left(\frac{1}{2.3.4}\right)^2+\left(\frac{1}{3.4.5}\right)^2+\ldots$ अनंत तक

$$=\frac{\pi^2}{4}-\frac{39}{16}.$$

9. $\frac{1^2.6^2}{5.7}\cdot\frac{2^2.6^2}{11.13}\cdot\frac{3^2.6^2}{17.19}\cdot\frac{4^2.6^2}{23.25}\cdot\ldots$ अनंत तक $=\frac{\pi}{3}$.

10. $\frac{4}{3},\frac{36}{35}\cdot\frac{100}{99}\cdot\frac{196}{195}\cdot\ldots\ldots$ अनंत तक $=\sqrt{2}$.

11. सिद्ध करो कि $\cos 2x+\cos 2y$

$$=2\cos^2 x\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left\{1-\frac{4y^2}{\{(2n-1)\pi+2x\}^2}\right\}\left\{1-\frac{4y^2}{\{(2n-1)\pi-2x\}^2}\right\}\right].$$

12. सिद्ध करो कि $\tan 8\theta=8\theta\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n+1)^2\pi^2-4\theta^2}\right]$.

13. सिद्ध करो कि $\cos\theta+\tan y.\sin\theta$

$$=\left(1+\frac{2\theta}{\pi-2y}\right)\left(1-\frac{2\theta}{\pi+2y}\right)\left(1+\frac{2\theta}{3\pi-2y}\right)\left(1-\frac{2\theta}{3\pi+2y}\right)\ldots\ldots$$

तथा फिर दिखाओ कि

$$\tan y=\frac{2}{\pi-2y}-\frac{2}{\pi+2y}+\frac{2}{3\pi-2y}-\frac{2}{3\pi+2y}+\ldots \text{ अनंत तक}$$

$$=8\sum_{1}^{\infty}\frac{y}{(2n-1)^2\pi^2-4y^2}.$$

14. सिद्ध करो कि $\cos\theta - \cot y \sin\theta$

$$= \left(1-\frac{\theta}{y}\right)\left(1+\frac{\theta}{\pi-y}\right)\left(1-\frac{\theta}{\pi+y}\right)\left(1+\frac{\theta}{2\pi-y}\right)\left(1-\frac{\theta}{2\pi+y}\right)\cdots\cdots$$

तथा फिर दिखाओ कि

$$\cot y = \frac{1}{y} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y}{y^2-n^2\pi^2}.$$

15. सिद्ध करो कि $\cosh 2y - \cos 2\theta$

$$=2\sin^2\theta\left[1+\frac{y^2}{\theta^2}\right]\left[1+\left(\frac{y}{\pi+\theta}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{y}{\pi-\theta}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{y}{2\pi+\theta}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{y}{2\pi-\theta}\right)^2\right]$$

........अनंत तक ।

16. सिद्ध करो कि

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{(\theta-\pi)} - \frac{1}{(\theta+\pi)} + \frac{1}{(\theta-2\pi)} + \frac{1}{(\theta+2\pi)} - \frac{1}{(\theta-3\pi)} - \frac{1}{(\theta+3\pi)} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{\theta} + 2\theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\theta^2-n^2\pi^2}.$$

17. $$\frac{1}{4\pi}\sec\theta = \frac{1}{(\pi^2-4\theta^2)} - \frac{3}{(3^2\pi^2-4\theta^2)} + \frac{5}{(5^2\pi^2-4\theta^2)} - $$

....अनंत तक ।

18. $$\operatorname{cosec}^2\theta = \frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{(\theta-\pi)^2} + \frac{1}{(\theta+\pi)^2} + \frac{1}{(\theta-2\pi)^2} + \frac{1}{(\theta+2\pi)^2} + \cdots$$

.....अनंत तक ।

19. $\frac{1}{4}\sec^2\theta = \frac{1}{(\pi-2\theta)^2} + \frac{1}{(\pi+2\theta)^2} + \frac{1}{(3\pi-2\theta)^2} + \frac{1}{(3\pi+2\theta)^2} + \ldots\ldots$

20. $\sin\theta+\cos\theta = \left(1+\frac{4\theta}{\pi}\right)\left(1-\frac{4\theta}{3\pi}\right)\left(1+\frac{4\theta}{5\pi}\right)\left(1-\frac{4\theta}{7\pi}\right)\ldots\ldots$ अनंत तक।

21. $\sin\theta+\cos\theta = \frac{(\pi+4\theta)}{2\sqrt{2}}\left\{1-\frac{(\pi+4\theta)^2}{4^2\pi^2}\right\}\left\{1-\frac{(\pi+4\theta)^2}{8^2\pi^2}\right\}\ldots\ldots$

22. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\ldots\ldots=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$

23. $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\ldots\ldots=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$

24. $1-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{23}+\frac{1}{25}-\ldots\ldots=\frac{\pi}{8}(\sqrt{2}+1)$

25. $1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\ldots\ldots=\frac{\pi^3}{32}.$

26. सिद्ध करो कि

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)=\frac{\pi}{4}\cos^2\theta\left(1+\frac{\cos^2\theta}{2.4}\right)\left(1+\frac{\cos^2\theta}{4.6}\right)\ldots\ldots$$

27. सिद्ध करो कि

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)=(1-\theta^2)-(1-\theta^2)\frac{\theta^2}{9}-(1-\theta^2)\left(1-\frac{\theta^2}{9}\right)\frac{\theta^2}{25}-\ldots\ldots,$$

तथा दिखाओ कि

$$\frac{1}{3^2}+\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\frac{1}{5^2}+\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)\frac{1}{7^2}+\ldots\ldots=\frac{\pi^4}{384}.$$

28. सिद्ध करो कि

$$\frac{1}{\pi}\sinh\pi=\left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots$$

29. सिद्ध करो कि

$$\frac{\pi}{4\theta}\tanh\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)=\left(\frac{1}{1^2+\theta^2}\right)+\left(\frac{1}{3^2+\theta^2}\right)+\left(\frac{1}{5^2+\theta^2}\right)+\ldots\ldots$$

30. सिद्ध करो कि

$$\frac{\sin(y-\theta)}{\sin y}=\left(1-\frac{\theta}{y}\right)\left(1+\frac{\theta}{\pi-y}\right)\left(1-\frac{\theta}{\pi+y}\right)\left(1+\frac{\theta}{2\pi-y}\right)\left(1-\frac{\theta}{2\pi+y}\right)\ldots\ldots$$

यदि 2,3,5,.....सब अभाज्य संख्याएं हों तो दिखाओ कि

31. $\frac{6}{\pi^2}=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\ldots\ldots$ अनन्त तक।

32. $\frac{15}{\pi^2}=\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{5^2}\right)\ldots\ldots$ अनन्त तक।

33. $\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \ldots\ldots$ एक श्रेणी है। अब एक

ऐसी श्रेणी बनाई जिसका कि प्रत्येक पद दत्त श्रेणी के दो दो पदों को गुणा करने पर मिलता है तो सिद्ध करो कि उस श्रेणी का योग $\frac{\pi^4}{120}$ होगा।

३४. सिद्ध करो कि

$$\tan^{-1}(\tanh y \cot x) = \tan^{-1}\frac{y}{x} - \sum_{n=1}^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{2xy}{n^2\pi^2 - x^2 + y^2}\right),$$

तथा फिर दिखाओ कि

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan^{-1}\frac{1}{n^2\pi^2} = \tfrac{1}{4}\pi - \tan^{-1}\left(\tanh \frac{1}{\sqrt{2}} \cot \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

१०.०५ यदि किसी समीकरण $\phi(x) = 0$ का मूल α हो, तो $(x-\alpha)$ दिये हुए व्यंजक $\phi(x)$ का गुणन खंड होगा। यदि दिये हुए समीकरण की कोटि n हो और उसके मूल $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ हों तथा $\phi(x)$ में x के उच्चतम घात का गुणांक इकाई हो तो

$$\phi(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots\ldots(x-\alpha_n).$$

अब गुणन खंड निकालने में इसी सिद्धान्त का प्रयोग करेंगे।

१०'०६ $(x^{2n} - 2x^n \cos n\theta + 1)$ के गुणन खंड—

गुणनखंड ज्ञात करने के लिये पहले हम समीकरण

$$x^{2n} - 2x^n \cos n\theta + 1 = 0$$

के मूल ज्ञात करें। यह समीकरण निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है

$$x^{2n} - 2n^n \cos n\theta + \cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta = 0$$

या $$(x^n - \cos n\theta)^2 = -\sin^2 n\theta$$

वर्गमूल लेने पर

$$x^n - \cos n\theta = \pm i \sin n\theta$$

$$\therefore \quad x = (\cos n\theta \pm i \sin n\theta)^{\frac{1}{n}},$$

या $x = [\cos (2r\pi + n\theta) \pm i \sin (2r\pi + n\theta)]^{\frac{1}{n}}$

$$= \cos\left(\frac{2r\pi + n\theta}{n}\right) \pm i \sin\left(\frac{2r\pi + n\theta}{n}\right),$$

जहाँ $r = 0, 1, 2, \ldots\ldots n-1$ है

इस प्रकार समीकरण के $2n$ मूल होंगे जिनका मान निम्न है

$$\cos\theta \pm i \sin\theta,\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) \pm i \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right), \ldots.,$$

$$\cos\left\{\theta + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right\} \pm i \sin\left\{\theta + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right\}.$$

गुणनखंडों के प्रथम युग्म का मान है

$(x - \cos\theta - i \sin\theta)(x - \cos\theta + i \sin\theta)$

अथवा $(x - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta$

अथवा $x^2 - 2x \cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta$

अर्थात् $x^2 - 2x \cos\theta + 1.$

इसी प्रकार द्वितीय, तृतीय......,nth युग्मों का मान निम्न है—

$$x^2 - 2x \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) + 1,$$

$$x^2 - 2x \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{n}\right) + 1,$$

....

....

तथा $x^2 - 2x \cos\left\{\theta + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right\} + 1.$

अतः $(x^{2n} - 2x^n \cos n\theta + 1)$

$$= (x^2 - 2x \cos\theta + 1)\left\{x^2 - 2x \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) + 1\right\}$$

....

$$\ldots\left[x^2-2x\cos\left\{\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\}+1\right]. \quad \ldots(1)$$

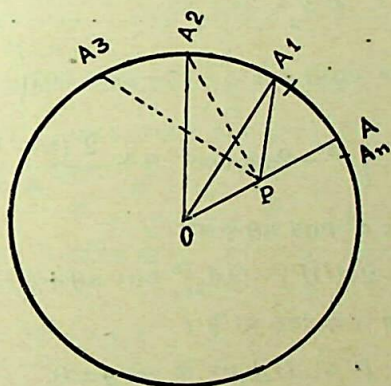
$$=\prod_{r=0}^{r=n-1}\left\{x^2-2x\cos\left(\theta+\frac{2r\pi}{n}\right)+1\right\} \quad \ldots(2)$$

x के स्थान पर $\frac{x}{a}$ रखकर तथा a^{2n} से गुणा करने पर हमें निम्न फल प्राप्त होगा

$$x^{2n}-2x^n a^n\cos n\theta+a^{2n}=$$

$$\prod_{r=0}^{r=n-1}\left\{x^2-2xa\cos\left(\theta+\frac{2r\pi}{n}\right)+a^2\right\}\ldots(3)$$

१०.०७ द-मायवर तथा कोटस के वृत्त के गुण धर्म—

§१०.०६ के फल (3) को ज्यामितीय रूप में भी व्यक्त कर सकते हैं। एक वृत्त लिया जिसका केन्द्र विन्दु O, और त्रिज्या a है वृत्त की परिधि पर n विन्दु

$A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots A_n$ ऐसे लिये जो वृत्तुल परिधि को n वरावर चापों में विभक्त करते हैं अर्थात्

$$\angle A_1OA_2=\angle A_2OA_3=\angle A_3OA_4\ldots\ldots\ldots=\frac{2\pi}{n}$$

एक विन्दु P वृत्त के अन्दर या वाहर ऐसा लिया कि

$$OP=x, \text{ तथा } \angle POA_1=\theta$$

$$\therefore \quad \angle POA_2=\theta+\frac{2\pi}{n}, \angle POA_3=\theta+\frac{4\pi}{n}, \ldots\ldots\ldots$$

अव हमें विदित है कि

$$PA_1^2=OP^2+OA_1^2-2OP.OA_1.\cos\theta,$$
$$=x^2+a^2-2xa\cos\theta.$$

तथा
$$PA_2^2=OP^2+OA_2^2-2OP.OA_2\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right),$$
$$=x^2+a^2-2xa\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right).$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$PA_n^2=x^2+a^2-2xa\cos\left\{\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\}.$$

अतः
$$PA_1^2.PA_2^2.PA_3^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots PA_n^2$$

$$=\left\{x^2-2ax\cos\theta+a^2\right\}\left\{x^2-2ax\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)+a^2\right\}$$
$$\ldots\left\{x^2-2ax\cos\left(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)+a^2\right\},$$

$$=x^{2n}-2x^na^n\cos n\theta+a^{2n}$$

$$=(OP)^{2n}-2(OP)^n(OA_1)^n\cos n\theta+(OA_1)^{2n}\ldots\ldots(1)$$

वृत्त का यह गुण धर्म द-मायवर का है।

अव यदि विन्दु P को OA_1 पर लें, तो $\theta=0$.

$$\therefore PA_1^2.PA_2^2\ldots PA_n^2=x^{2n}-2x^na^n+a^{2n},$$
$$=(x^n-a^n)^2$$

वर्गमूल लेने पर

$$PA_1.PA_2\ldots PA_n=x^n-a^n \text{ या } a^n-x^n.$$

इन दोनों मानों में से प्रथम मान उस समय होगा जब विन्दु P वृत्त के बाहर होगा अर्थात् $OP > OA_1$ तथा द्वितीय मान उस समय लेंगे जब विन्दु P वृत्त के अन्दर होगा अर्थात् $OP < OA_1$.

$$\therefore \; PA_1 . PA_2 \ldots . PA_n = x^n \sim a^n \qquad \ldots .(2)$$

वृत्त की परिधि पर $M_1, M_2, M_3, \ldots . M_n$ ऐसे n विन्दु और लिये जो $A_1A_2,\; A_2A_3, \ldots . A_nA_1$ चापों के मध्य विन्दु हैं। इस प्रकार वृत्त की परिधि के $2n$ बराबर भाग हो गये।

अतः समीकरण (2) से

$$PA_1 . PM_1 . PA_2 . PM_2 . PA_3 . PM_3 \ldots\ldots\ldots 2n \text{ खंडों तक}$$
$$= x^{2n} \sim a^{2n}. \qquad \ldots .(3)$$

अब (3) को (2) से भाग देने पर

$$PM_1 . PM_2 . PM_3 \ldots . PM_n = x^n + a^n \; . \qquad \ldots .(4)$$

(3) तथा (4) वृत्त के गुण धर्म, कोटस ने प्राप्त किये थे।

१०.०१ $(x^n - 1)$ के गुणन खंड—

गुणनखंड ज्ञात करने से पूर्व हम समीकरण $x^n - 1 = 0$ के मूल ज्ञात करेंगे।

अब $\qquad x^n - 1 = 0$

$\therefore \qquad x^n = 1 = \cos 2r\pi + i \sin 2r\pi$

या $\qquad x = [\cos 2r\pi + i \sin 2r\pi]^{1/n}$

$$= \cos \frac{2r\pi}{n} + i \sin \frac{2r\pi}{n} .$$

इस प्रकार दाहिने पक्ष के व्यंजक के n मान होंगे जब कि

$$r = 0, 1, 2, \ldots\ldots n-1.$$

अर्थात समीकरण के मूल निम्न हैं

$$1, \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right), \left(\cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n} \right), \ldots\ldots$$

$$\ldots \left\{ \cos \frac{2(n-2)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-2)\pi}{n} \right\},$$

$$\left\{ \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} \right\}.$$

अब अंतिम मूल $= \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{n}\right),$

$$= \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

अंत से द्वितीय मूल $= \cos\frac{4\pi}{n} - i\sin\frac{4\pi}{n}.$

इसी प्रकार अंत से तृतीय, चतुर्थ इत्यादि मूलों का मान ज्ञात कर सकते हैं।

अब हम देखते हैं कि $r = 1$. तथा $r = n-1$, से प्राप्त मूल संयुग्मी समिश्र मूल हैं। इसी प्रकार $r = 2$ तथा $r = n - 2, r = 3$ तथा $r = n-3$, इत्यादि से प्राप्त मूल भी संयुग्मी समिश्र मूल हैं। अब दो परिस्थितियाँ उत्पन्न होंगी

(i) मान लिया n एक सम संख्या है

अतः $r = \frac{n}{2}$ के लिए मूल

$$= \cos\frac{n\pi}{n} + i\sin\frac{n\pi}{n}$$

$$= \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

तथा $r=0$, के लिए मूल $= 1$

इससे हमें विदित होता है कि जब n एक सम संख्या है तो समीकरण $x^n - 1 = 0$ के दो वास्तविक मूल होते हैं और $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ युग्म, संयुग्मी समिश्र मूलों के होते हैं जैसा कि निम्न से प्रकट है

$$\pm 1,\ \cos\frac{2\pi}{n} \pm i\sin\frac{2\pi}{n},\ \cos\frac{4\pi}{n} \pm i\sin\frac{4\pi}{n}, \ldots$$

$$, \ldots\ldots\ldots, \cos\frac{(n-2)\pi}{n} \pm i\sin\frac{(n-2)\pi}{n}.$$

वास्तविक मूलों से प्राप्त गुणनखंड $(x-1)$ तथा $(x+1)$ होंगे, अर्थात् द्विघातीय गुणनखंड (x^2-1) है।

संयुग्मी समिश्र मूल के प्रथम युग्म से प्राप्त गुणनखंड है

$$\left(x-\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}\right) \text{ तथा } \left(x-\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

अर्थात् द्विघातीय गुणनखंड $\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)$ है।

इसी प्रकार अन्य युग्मों से अन्य द्विघातीय गुणनखंड प्राप्त होंगे। अतः जब n एक सम संख्या है तो

$$x^n-1=(x^2-1)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1\right)\ldots\ldots$$

$$\ldots\left(x^2-2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+1\right),$$

$$=(x^2-1)\prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1}\left\{x^2-2x\cos\frac{2r\pi}{n}+1\right\}.$$

(ii) अब मान लिया कि n एक विषम संख्या है।

समीकरण $x^n-1=0$ का केवल एक वास्तविक मूल होगा और $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ युग्म, संयुग्मी समिश्र मूलों के होंगे और उनका मान निम्न होगा

$$1,\ \cos\frac{2\pi}{n}\pm i\sin\frac{2\pi}{n},\ \cos\frac{4\pi}{n}\pm i\sin\frac{4\pi}{n},\ldots\ldots$$

$$,\ldots\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\pm i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

पहले की ही भांति संयुग्मी समिश्र मूलों के जोड़ों से द्विघातीय गुणनखंड प्राप्त हो सकते हैं। अतः जब n एक विषम संख्या है तो

$$x^n-1=(x-1)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\left\{x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1\right\},$$

$$=(x-1)\prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\left\{x^2-2x\cos\frac{2r\pi}{n}+1\right\}.$$

टिप्पणी १—उपर्युक्त की भांति हम व्यंजक (x^n+1) को गुणनखंडों के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

(*i*) जब n एक समसंख्या है

$$(x^n+1)=\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{3\pi}{n}+1\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\left\{x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1\right\},$$

$$=\prod_{r=0}^{\frac{n}{2}-1}\left\{x^2-2x\cos\frac{(2r+1)\pi}{n}+1\right\},$$

तथा (*ii*) जब n एक विषम संख्या है

$$x^n+1=(x+1)\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{3\pi}{n}+1\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\left\{x^2-2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+1\right\},$$

$$=(x+1)\prod_{r=0}^{\frac{n-3}{2}}\left\{x^2-2x\cos\frac{(2r+1)\pi}{n}+1\right\}.$$

इन फलों को प्राप्त करने की विधि पूर्ण रूप से हल करने के लिये विद्यार्थियों के लिए छोड़ी जाती है।

टिप्पणी २—इन सूत्रों की सहायता से हम $\sin\theta$ तथा $\cos\theta$ को भी अनंत गुणनफलों के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

टिप्पणी ३---ये सूत्र § १०.०६ में क्रमशः $n\theta=2\pi$ और $n\theta=\pi$, रखकर भी प्राप्त किये जा सकते हैं ।

उदाहरण १ । $(\cos n\phi - \cos n\theta)$ को गुणनखंडो के गुणनफल के रूप में व्यक्त करो ।

हमें विदित हैं कि

$$x^{2n}-2x^n\cos n\theta+1=\prod_{r=0}^{n-1}\left\{x^2-2x\cos\left(\theta+\frac{2r\pi}{n}\right)+1\right\}$$

समीकरण के दोनों पक्षों को x^n से भाग देने पर

$$x^n+\frac{1}{x^n}-2\cos n\theta=\prod_{r=0}^{n-1}\left\{x+\frac{1}{x}-2\cos\left(\theta+\frac{2r\pi}{n}\right)\right\}.$$

अब यदि $x=e^{i\phi}$, तो $x^{-1}=e^{-i\phi}$

अतः $$x+\frac{1}{x}=e^{i\phi}+e^{-i\phi}=2\cos\phi,$$

तथा $$x^n+\frac{1}{x^n}=e^{in\phi}+e^{-in\phi}=2\cos n\phi.$$

समीकरण में x का मान रख कर और उपर्युक्त सूत्रों का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त है

$$2\cos n\phi-2\cos n\theta=\prod_{r=0}^{n-1}\left\{2\cos\phi-2\cos\left(\theta+\frac{2r\pi}{n}\right)\right\}$$

अतः $$\cos n\phi-\cos n\theta=2^{n-1}\prod_{r=0}^{n-1}\left\{\cos\phi-\cos\left(\theta+\frac{2r\pi}{n}\right)\right\}.$$

उदाहरण २ । सिद्ध करो कि

$$\sin n\phi=2^{n-1}\sin\phi\,\sin\left(\phi+\frac{\pi}{n}\right)\cdots\cdots\cdots\sin\left(\phi+\frac{n-1}{n}\pi\right),$$

तथा $\cos n\phi = 2^{n-1} \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2n}\right) \sin\left(\phi + \frac{3\pi}{2n}\right) \ldots\ldots$

$$\sin\left(\phi + \frac{2n-1}{2n}\pi\right).$$

§१०.०६ के (1) में $x=1$ तथा $\theta=2\phi$ रखने पर हमें प्राप्त है

$$2-2\cos 2n\phi = (2-2\cos 2\phi)\left\{2-2\cos\left(2\phi+\frac{2\pi}{n}\right)\right\}$$

...... n गुणनखंडों तक ।

$$4\sin^2 n\phi = 4^n \sin^2\phi.\ \sin^2\left(\phi+\frac{\pi}{n}\right)\ldots\ldots$$

$$\sin^2\left(\phi+\frac{n-1}{n}\pi\right).$$

दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर

$$\sin n\phi = 2^{n-1}\sin\phi \sin\left(\phi+\frac{\pi}{n}\right)\ldots\sin\left(\phi+\frac{n-1}{n}\pi\right).$$

अब $\cos n\phi$ का मान निकालने के लिये ϕ के स्थान पर $\left(\phi+\frac{\pi}{2n}\right)$ रखा तो $\sin n\phi$ का मान $\cos n\phi$ का मान हो जायगा ।

उदाहरण ३ । सिद्ध करो कि

$$2^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n}\ldots\ldots = \sqrt{n}.$$

ऊपर के उदाहरण से हमें प्राप्त है

$$\frac{\sin n\phi}{\sin\phi} = 2^{n-1}\sin\left(\phi+\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\phi+\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\ldots\ldots$$

$$\sin\left(\phi+\frac{n-1}{n}\pi\right). \quad \ldots (1)$$

अब ϕ को इतना कम कर दिया कि $\phi \to 0$,

इस अवस्था में

$$\left[\frac{\sin n\phi}{\sin\phi}\right]_{\phi\to 0} = \left[\frac{\sin n\phi}{n\phi} \cdot \frac{n}{\frac{\sin\phi}{\phi}}\right]_{\phi\to 0} = n$$

अत: (1) का रूप निम्न हो जायेगा

$$n = 2^{n-1} \sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \ldots\ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

दाहिने पक्ष में प्रथम तथा अंतिम, द्वितीय और अंत से दूसरा, इत्यादि गुणनखंड एक दूसरे के बराबर हैं।

$$\therefore\ n = 2^{n-1} \sin^2\frac{\pi}{n} \sin^2\frac{2\pi}{n} \ldots\ldots\ldots$$

वर्गमूल लेने पर

$$\sqrt{n} = 2^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \ldots\ldots\ldots$$

दाहिने पक्ष का अंतिम गुणनखंड यदि n विषम है तो $\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}$,

तथा यदि n सम है तो $\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}$ होगा।

इस उदाहरण को हम § १०.०८ में प्राप्त सूत्र से भी हल कर सकते हैं क्योंकि हमें विदित है

$$\frac{x^n - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1}{x + 1}$$

$$\therefore\quad \left\{\frac{x^n - 1}{x^2 - 1}\right\}_{x\to 1} = \frac{n}{2},$$ इत्यादि।

उदाहरण

सिद्ध करो कि

1. $$2^{n-1}\cos\phi\cos\left(\phi+\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\phi+\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\ldots\cos\left(\phi+\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

$$=(-1)^{\frac{n}{2}}\sin n\phi,$$ यदि n सम संख्या है।

तथा $$=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos n\phi,$$ यदि n विषम संख्या है।

2. $$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\tan\phi.\tan\left(\phi+\frac{\pi}{n}\right).\tan\left(\phi+\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\ldots\tan\left(\phi+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$=\tan n\phi,$$ यदि n विषम संख्या है।

३. यदि n सम संख्या हो तो सिद्ध करो कि

$$2^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\sin\frac{5\pi}{2n}\ldots\sin\frac{n-1}{2n}\pi=1$$

$$=2^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{\pi}{2n}.\cos\frac{3\pi}{2n}\ldots\ldots\cos\frac{n-1}{2n}\pi.$$

4. यदि n विषम संख्या हो तो सिद्ध करो कि

(i) $$2^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{4\pi}{2n}\ldots\ldots\sin\frac{n-1}{2n}\pi=\sqrt{n}$$

$$=2^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{3\pi}{2n}\ldots\cos\frac{n-2}{2n}\pi.$$

(ii) $2^{\frac{n-1}{2}} \sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{3\pi}{2n} \ldots\ldots \sin \frac{n-2}{2n}\pi$

$$=1=2^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{2\pi}{2n} \cos \frac{4\pi}{2n} \ldots\ldots \cos \frac{n-1}{2n}\pi.$$

सिद्ध करो कि

5. $2^{\frac{n-1}{2}} \cos \frac{\pi}{2n} \cos \frac{3\pi}{2n} \cos \frac{5\pi}{2n} \ldots\ldots \cos \frac{2n-1}{2n}\pi$

$$= \cos \frac{n\pi}{2}.$$

6. $2^{n-1} \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots \sin \frac{n-1}{n}\pi = n.$

7. $2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{3\pi}{2n} \cdot \sin \frac{5\pi}{2n} \ldots\ldots \sin \frac{2n-1}{2n}\pi = 1.$

8. $2^{2n\ 1} \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{2\pi}{n} \ldots\ldots \cos \frac{2n-1}{n}\pi$

$$= \left\{(-1)^n - 1\right\}.$$

9. $\prod_{r=0}^{n-1} \left\{\cos\theta - \cos \frac{2r\pi}{n}\right\} + \prod_{r=0}^{n-1} \left\{1 - \cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right)\right\}$

$$=0$$

10. $\frac{x^n - a^n \cos n\theta}{x^{2n} - 2x^n a^n \cos n\theta + a^{2n}} = \frac{1}{nx^{n-1}}$

$$\sum_{r=0}^{n-1} \frac{x - a\cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right)}{x^2 - 2ax\cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right) + a^2}.$$

11. $\cosh n\phi - \cos n\theta = 2^{n-1} \prod_{r=0}^{n-1} \left\{ \cosh \phi - \cos\left(\theta + \frac{2r\pi}{n}\right) \right\}.$

12. एक वृत्तुल परिधि पर $2n$ विन्दु $M_1, M_2, \ldots\ldots, M_{2n}$ ऐसे लिए जो परिधि को $2n$ वरावर भागों में बाँटते हैं। तो सिद्ध करो

(i) $M_1M_2 . M_1M_3 \ldots\ldots M_1M_n = a^{n-1}\sqrt{n},$

जहाँ a वृत्त की त्रिज्या है।

तथा यदि P चाप M_1M_{2n} का मध्य विन्दु हो तो सिद्ध करो

(ii) $PM_1 . PM_2 \ldots\ldots\ldots PM_n = a^n\sqrt{2}.$

13. $A_1, A_2, \ldots\ldots A_{2n+1}$ एक $(2n+1)$ भुजाओं वाले सम बहुभुज के शीर्ष विन्दु हैं जो एक वृत्त की परिधि पर स्थित हैं। वृत्त की त्रिज्या a है। यदि QA_{n+1} एक व्यास हो तो सिद्ध करो कि

$$QA_1 . QA_2 \ldots\ldots QA_n = a^n.$$

14. यदि $2nx = \pi$, तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\sin 2x . \sin 4x \ldots\ldots\ldots \sin (2n-2)x}{\sin x . \sin 3x \ldots\ldots\ldots \sin (2n-1)x} = n.$$

15. यदि $4(n+1)x = \pi$, तो सिद्ध करो कि

$$\cot x . \cot 3x \cot 5x \ldots\ldots\ldots \cot (2n+1)x = 1.$$

16. सिद्ध करो कि

$$(x+1)^{2n} + (x-1)^{2n} = 2 \prod_{r=1}^{n} \left\{ x^2 + \tan^2 \frac{(2r+1)\pi}{4n} \right\}.$$

17. सिद्ध करो कि $\tan^{-1} (\cot n\theta \tanh ny)$

$$= \tan^{-1} (\cot\theta \tanh y) + \tan^{-1}\left\{ \cot\left(\theta + \frac{\pi}{n}\right)\tanh y \right\}$$

$$+ \tan^{-1}\left\{ \cot\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right)\tanh y \right\} + \ldots\ldots n \text{ पदों तक।}$$

18. यदि n विषम संख्या हो, तो सिद्ध करो

$$\tan\frac{\pi}{n}\tan\frac{2\pi}{n}\tan\frac{3\pi}{n}\ldots\ldots\tan\tfrac{1}{2}\frac{(n-1)}{n}\pi=\sqrt{n}.$$

अध्याय १० पर उदाहरण

.1 $$\frac{\cos x-\cos y}{1-\cos y}=\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)\left\{1-\frac{x^2}{(2\pi-y)^2}\right\}$$
$$\left\{1-\frac{x^2}{(2\pi+y)^2}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{(4\pi-y)^2}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{(4\pi+y)^2}\right\}\ldots\ldots$$

2. $$\frac{\cos x+\cos y}{1+\cos y}=\left\{1-\frac{x^2}{(\pi-y)^2}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{(\pi+y)^2}\right\}$$
$$\left\{1-\frac{x^2}{(3\pi-y)^2}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{(3\pi+y)^2}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. $$\frac{\sin x+\sin y}{\sin y}=\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{x}{\pi-y}\right)\left(1-\frac{x}{\pi+y}\right)$$
$$\left(1+\frac{x}{2\pi+y}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi-y}\right)\ldots\ldots$$

4. $$\frac{2^2}{2^2+1}\cdot\frac{3^2}{3^2+1}\cdot\frac{5^2}{5^2+1}\ldots\ldots\ldots=\frac{\pi^2}{15}$$

5. $$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^4(n+1)^4}=\frac{\pi^4}{45}+\frac{10\pi^2}{3}-35.$$

6. $$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^3(n+1)^3}=10-\pi^2.$$

7. $$\frac{1}{1^2+4x^2}+\frac{1}{3^2+4x^2}+\frac{1}{5^2+4x^2}+\ldots\ldots$$
$$=\frac{\pi}{8x}\cdot\frac{(e^{\pi x}-e^{-\pi x})}{(e^{\pi x}+e^{-\pi x})}.$$

8. $$\frac{1}{1^2+x^2}+\frac{1}{2^2+x^2}+\frac{1}{3^2+x^2}+\ldots\ldots$$

$$=\frac{\pi}{2x}\frac{(e^{\pi x}+e^{-\pi x})}{(e^{\pi x}-e^{-\pi x})}-\frac{1}{2x^2}.$$

9. सिद्ध करो $$\frac{\left(\frac{\pi^2}{4}+1\right)\left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{9}\right)\left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{25}\right)\ldots}{\left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{16}\right)\left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{36}\right)\ldots}=\frac{e^2+1}{e^2-1}.$$

10. दिखाओ कि

$$\tan^{-1}\frac{2a^2}{\pi^2}+\tan^{-1}\frac{2a^2}{2^2\pi^2}+\tan^{-1}\frac{2a^2}{3^2\pi^2}+\ldots\ldots\ldots$$

$$=\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\left(\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}\cdot\cot a\right).$$

11. दिखाओ कि

$$\tan^{-1}x-\tan^{-1}\frac{x}{3}+\tan^{-1}\frac{x}{5}-\tan^{-1}\frac{x}{7}+\ldots\ldots\ldots$$

$$=\tan^{-1}e^{\frac{1}{2}\pi x}-\frac{\pi}{4}.$$

12. $$\left\{1+\frac{1}{1+1^2}+\frac{2}{1+2^2}+\frac{2}{1+3^2}+\ldots\ldots\right\}$$

$$\times\left\{\frac{1}{4+1^2}+\frac{1}{4+3^2}+\frac{1}{4+5^2}+\ldots\ldots\right\}=\frac{\pi^2}{8}.$$

13. यदि 2, 3, 5, ... आदि रूढ़ि संख्याएँ हों तो

$$\frac{2^4}{2^4+1}\cdot\frac{3^4}{3^4+1}\cdot\frac{5^4}{5^4+1}\ldots\ldots=\frac{\pi^4}{105}$$

14. सिद्ध करो कि

$$\prod_{r=1}^{\infty}\frac{2^2r^2-1}{2^2r^2+1}=\operatorname{cosech}\frac{\pi}{2}.$$

विविध उदाहरण

सिद्ध करो

1. $\tan^{-1} x+\cot^{-1} (x+1)= \tan^{-1} (x^2+x+1)$.

2. $\tan^{-1} x=2 \tan^{-1} (\operatorname{cosec} \tan^{-1}x-\tan \cot^{-1}x)$.

3. $\tan^{-1} \frac{yz}{xr}+\tan^{-1}\frac{zx}{yr}+\tan^{-1} \frac{xy}{zr}=\frac{\pi}{2}$,

जहाँ $r^2=x^2+y^2+z^2$.

4. $\cot^{-1} \frac{xy+1}{x-y}+\cot^{-1}\frac{yz+1}{y-z}+\cot^{-1}\frac{zx+1}{z-x}=0$.

5. $\frac{1}{6}\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}+\frac{1}{9} \tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{1}{12}\tan^{-1}\frac{4x-4x^3}{1-6x^2+x^4}$
$= \tan^{-1}x$.

6. यदि $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$, सिद्ध करो कि

$$x+y+z=xyz$$

हल करो

7. $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2}+\tan^{-1}\frac{x+1}{x+2}=\pi/4$.

8. $\tan^{-1} (x-1)+\tan^{-1}x+\tan^{-1} (x+1)=\tan^{-1} 3x$.

9. $\cos^{-1} (x+\frac{1}{2})+\cos^{-1} (x)+\cos^{-1} (x-\frac{1}{2})=\frac{3}{2}\pi$.

10. $\cot^{-1} (x-1)+\cot^{-1} (x-2)+\cot^{-1} (x-3) = 0$.

11. $\tan^{-1} (x+1)+\cot^{-1} (x-1)=\sin^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{3}{5}$.

12. यदि $\cos^{-1}\frac{x}{a}+\cos^{-1}\frac{y}{b}=\alpha$, सिद्ध करो कि

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\alpha.$$

13. निम्न के व्यापक मान लिखो जब k एक पूर्ण संख्या है,

(i) $\sin^{-1} \frac{1}{2}(-1)^k$, (ii) $\cos^{-1}\frac{1}{2}(-1)^k$, (iii) $\tan^{-1}(-1)^k$.

14. सिद्ध करो

$$\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}\frac{c-a}{1+ca}$$
$$=\tan^{-1}\frac{a^2-b^2}{1+a^2b^2}+\tan^{-1}\frac{b^2-c^2}{1+b^2c^2}+\tan^{-1}\frac{c^2-a^2}{1+c^2a^2}.$$

15. दिखाओ

$$\cos^{-1}\sqrt{\frac{(a-x)}{(a-b)}}=\sin^{-1}\sqrt{\frac{(x-b)}{(a-b)}}=\cot^{-1}\sqrt{\frac{(a-x)}{(x-b)}}$$
$$=\tfrac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2\sqrt{(a-x)(x-b)}}{a-b}.$$

16. यदि $\tan^{-1}\sqrt{\frac{(a-c)}{(c+x)}}+\tan^{-1}\sqrt{\frac{(a-c)}{(c+y)}}+$

$$\tan^{-1}\sqrt{\frac{(a-c)}{(c+z)}}=0,$$

तो दिखाओ

$$\begin{vmatrix}1 & x & (a+x)\sqrt{(c+x)}\\ 1 & y & (a+y)\sqrt{(c+y)}\\ 1 & z & (a+z)\sqrt{(c+z)}\end{vmatrix}=0.$$

17. यदि समीकरण $\alpha z^2+2\beta z+\gamma=0$ के मूल z_1 तथा z_2 हों तो दिखाओ कि

$$|z_1|+|z_2|=\frac{1}{|\alpha|}\left\{|-\beta+\sqrt{(\alpha\gamma)}|+|-\beta-\sqrt{(\alpha\gamma)}|\right\}$$

18. यदि $\tan(\theta-\alpha)\tan(\theta-\beta)=\tan^2\theta$, तो दिखाओ कि

$$\theta=\tfrac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

निम्न को $x+iy$ के रूप में व्यक्त करो

19. $\dfrac{(2-3i)(4+7i)}{(5+6i)(-1+9i)}$.

20. $\left(\dfrac{a+ib}{a-ib}\right)^2-\left(\dfrac{a-ib}{a+ib}\right)^2$.

21. यदि z_1 तथा z_2 दो मिश्र काल्पनिक राशियाँ हो तो सिद्ध करो

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2,$$

तथा यह भी दिखाओ कि

$$|z_1+\sqrt{(z_1^2-z_2^2)}|+|a-\sqrt{(z_1^2-z_2^2)}|=|z_1+z_2| + |z_1-z_2|.$$

22. यदि आरगैंड चित्र में विन्दु P एक मिश्र काल्पनिक राशि $z=x+iy$ को प्रकट करता है तो P का विन्दु पथ ज्ञात करो जब

(i) $|z-a+ib|=3$, (ii) कोणांक $(z)=0$

23. दो विन्दु P तथा Q आरगैंड चित्र में दो मिश्र काल्पनिक राशियों z तथा $3z+2+i3$ को प्रकट करते हैं। यदि P, एक वृत्त पर जिसका केन्द्र मूल विन्दु है और त्रिज्या ρ है, चलता है तो Q का विन्दु पथ ज्ञात करो।

24. $$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{1}{(\alpha-\beta)}\left[\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{x-\beta}\right]$$ एक सर्वसमिका है। यदि $x=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$,

$\alpha=\cos 2\theta_1+i\sin 2\theta_1$ तथा $\beta=\cos 2\theta_2+i\sin 2\theta_2$,

सिद्ध करो कि

(i) $$\sin(\theta_1-\theta_2)\cos(2\theta+\theta_1+\theta_2)$$
$$\equiv\sin(\theta-\theta_2)\cos(\theta+2\theta_1+\theta_2)-\sin(\theta-\theta_1)\cos(\theta+\theta_1+2\theta_2)$$

तथा (ii) $$\sin(\theta_1-\theta_2)\sin(2\theta+\theta_1+\theta_2)$$
$$\equiv\sin(\theta-\theta_2)\sin(\theta+2\theta_1+\theta_2)-\sin(\theta-\theta_1)\sin(\theta+\theta_1+2\theta_2).$$

25. सिद्ध करो कि समीकरण

$$x^{16}-47x^8+1=0$$

के मूल

$$\tfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})\left(\cos\frac{r\pi}{4}\pm i\sin\frac{r\pi}{4}\right)$$

के विभिन्न मान हैं जहाँ r एक पूर्ण संख्या है।

26. द-मायवर प्रमेय के प्रयोग से एक समीकरण ज्ञात करो जिसके मूल समीकरण $x^2-2x\cos\theta+1=0$ के मूलों के nth घात के बराबर हों।

27. यदि $(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots\ldots,$ तो दिखाओ कि

$$a_0-a_2+a_4-\ldots\ldots\ldots\ldots=2^{n/2}\cos\tfrac{1}{4}n\pi,$$

तथा $$a_1-a_3+a_5-\ldots\ldots\ldots\ldots=2^{n/2}\sin\tfrac{1}{4}n\pi.$$

28. द-मायवर प्रमेय के प्रयोग से निम्न समीकरण हल करो—

(i) $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0.$

(ii) $x^7+x^4+x^3+1=0.$

(iii) $x^7+1=0.$

29. यदि α,β समीकरण $t^2-2t+2=0$ के मूल हों तो सिद्ध करो कि

$$\frac{(x+\alpha)^n-(x+\beta)^n}{\alpha-\beta}=\frac{\sin n\phi}{\sin^n\phi},$$

जहाँ $\phi=\cot^{-1}(x+1)$.

३०. विन्दु P आरगैंड चित्र में मिश्र काल्पनिक राशि z को निरूपित करता है तो उन विन्दुओं को चित्र में बनाओ जो निम्न राशियों को प्रकट करेंगे

(i) z^2; (ii) z^2+3; (iii) $(z+1)^2$; (iv) $-z^{-1}$.

31. यदि $z_1=(1-iz)/(z-i)$ तथा z को प्रकट करने वाला विन्दु x-अक्ष पर -1 से $+1$ तक विचरण करता है तो z_1 को प्रकट करने वाला विन्दु किस प्रकार विचरण करेगा।

32. यदि $\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)+\cos(\alpha-\beta)=-\frac{3}{2}$, तो सिद्ध करो कि

$$\cos n\alpha+\cos n\beta+\cos n\gamma=0$$

जब n, 3 का अपवर्त्य नहीं है,

तथा $$=3\cos\tfrac{1}{3}n(\alpha+\beta+r)$$

जब n, 3 का अपवर्त्य है।

33. सिद्ध करो

$$1+\cos 10\theta=2\,(16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta)^2$$

34. $(\sin\theta)^{4n+2}$ को θ के अपवर्त्यों के cosines की श्रेणी में विस्तार करो।

35. सिद्ध करो

$$\frac{\cos\theta}{(n-1)!\,(n+1)!}+\frac{\cos 2\theta}{(n-2)!\,(n+2)!}+\frac{\cos 3\theta}{(n-3)!\,(n+3)!}+\ldots\ldots+\frac{\cos n\theta}{!2n}$$

$$=2^{n-1}\,\frac{(1+\cos\theta)^n}{!\,2n}-\frac{1}{2\,(!\,n)^2}\,.$$

36. $\log\dfrac{(1+n)^4\cos^2\theta+(1-n)^4\sin^2\theta}{(1+n)^2\cos^2\theta+(1-n)^2\sin^2\theta}$ को θ के अपवर्त्यों के cosines की श्रेणी में विस्तार करो।

37. यदि m सम संख्या हो तो सिद्ध करो

$$\frac{1+\cos(2m+1)\theta}{1+\cos\theta}$$

$$=\left\{1+m\cos\theta-\frac{m.\,(m+2)}{1.2}\cos^2\theta-\frac{(m-2).m.(m+2)}{1.2.3}\cos^3\theta+\frac{(m-2)\,m\,(m+2)(m+4)}{1.2.3.4.}\cos^4\theta+\ldots\ldots\right\}^2$$

38. सिद्ध करो कि समीकरण

$$ah\sec\theta-bk\,\mathrm{cosec}\,\theta=a^2-b^2$$

के 4 मूल हैं और θ के उन चार मानों का योग, जो समीकरण को संतुष्ट करते हैं π का विषम अपवर्त्य होगा।

39. $$\frac{\sin\alpha}{(n-1)!\,(n+1)!}+\frac{2\sin 2\alpha}{(n-2)!\,(n+2)!}+\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{n\sin n\alpha}{!\,2n}=\frac{2^{n-2}(1+\cos\alpha)^{n-1}}{!\,2n-1}\sin\alpha.$$

40. सिद्ध करो

$$\log\frac{a^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}$$

$$=4\;[c\sin^2\theta-\tfrac{1}{2}c^2\sin^2 2\theta+\tfrac{1}{3}c^3\sin^2 3\theta-\ldots\ldots\ldots],$$

जहाँ $c=\dfrac{a-b}{a+b}$.

41. सिद्ध करो।

$$\tan^{-1}\frac{a\sin\theta}{1-a\cos\theta}=a\sin\theta+\tfrac{1}{2}a^2\sin 2\theta+\tfrac{1}{3}a^3\sin 3\theta$$

$+\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots$,अनंत तक।

42. सिद्ध करो कि $\log\;(a^3+b^3+c^3-3abc)$ के विस्तार में c^n का गुणांक निम्न है

$$\frac{1}{n}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{(a+b)^n}-\frac{2\cos\;n\theta}{(a^2+b^2-ab)^{n/2}}\right],$$

जहाँ $\tan\theta=\dfrac{a-b}{a+b}\sqrt{3}$.

43. यदि $-\frac{1}{4}\pi<\theta<\frac{1}{4}\pi$, सिद्ध करो

(i) $$\tfrac{1}{2}\log\frac{1+\sin\phi.\sin 2\theta}{1-\sin\phi.\sin 2\theta}$$

$$=\sin\phi\tan\theta-\tfrac{1}{3}\sin 3\phi\tan^3\theta+\tfrac{1}{5}\sin 5\phi\tan^5\theta$$

$-\ldots\ldots\ldots,$

तथा (ii) $\frac{1}{2}\tan^{-1}(\tan 2\theta.\cos\phi)$

$$=\cos\phi\tan\theta-\tfrac{1}{3}\cos 3\phi\tan^3\theta+\tfrac{1}{5}\cos 5\phi\tan^5\theta$$

$-\ldots\ldots\ldots.$

44. यदि किसी त्रिभुज का कोण C ज्ञात हो और दो आसन्न भुजाएँ a तथा b लगभग बराबर हों तो दिखाओ कि शेष दोनों कोणों का मान लगभग निम्न होगा

$$90^\circ - \frac{C}{2} \pm \frac{180^\circ}{\pi}\left\{\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}\right)^3\right\},$$

45. यदि किसी त्रिभुज में $a<c$, तो दिखाओ कि

$$\frac{\cos nA}{b^n} = \frac{1}{c^n}\left\{1 + \frac{na}{c}\cos B + \frac{n(n+1)}{1.2}\frac{a^2}{c^2}\cos 2B + \ldots\ldots\right\},$$

तथा
$$\frac{\sin nA}{b^n} = \frac{n}{c^n}\left\{\frac{a}{c}\sin B + \frac{(n+1)}{1.2}\frac{a^2}{c^2}\sin 2B + \ldots\ldots\ldots\right\}.$$

46. यदि समीकरण $x^3+3qx+r=0$ का एक मूल $ke^{i\theta}$ हो तो $3q=-k^2(1+2\cos 2\theta)$, तथा $r=2k^3\cos\theta$.

47. दिखाओ कि

$$\frac{\pi^2}{2.4} - \frac{\pi^4}{2.4.6.8} + \frac{\pi^6}{2.4.6.8.10.12} - \ldots\ldots\ldots = 1.$$

48. यदि $x = \frac{2}{1!} - \frac{4}{3!} + \frac{6}{5!} - \frac{8}{7!} + \ldots\ldots\ldots$ अनंत तक

तथा $y = 1 + \frac{2}{1!} - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \ldots\ldots\ldots$ अनंत तक

सिद्ध करो कि $x^2=y$.

49. यदि त्रिभुज ABC में कोण $B<$ कोण A तो सिद्ध करो कि

$$B = \frac{b}{a}\sin C + \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\sin 2C + \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}\sin 3C + \ldots\ldots.$$

50. यदि किसी त्रिभुज में $a>b$, तो दिखाओ कि

$$\log c=\log a-\frac{b}{a}\cos C-\tfrac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\cos 2C-\tfrac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}\cos 3C-\ldots\ldots\ldots\ldots$$

51. यदि $-1<x<+1$, तो

$$\log\tan^{-1}x-\log x=-\tfrac{1}{3}x^2+\frac{13}{90}x^4-\ldots\ldots\ldots\ldots$$

52. यदि $\cot\theta=\frac{1}{x}+\cot\alpha$, तो दिखाओ कि

$$\theta=\frac{x}{\sin\alpha}\sin\alpha-\tfrac{1}{2}\frac{x^2}{\sin^2\alpha}\cdot\sin 2\alpha+\tfrac{1}{3}\frac{x^3}{\sin^3\alpha}\cdot\sin 3\alpha-\ldots\ldots$$

53. सिद्ध करो कि $\sin\frac{\pi}{14}$ समीकरण

$64x^6-80x^4+20x^2-1=0$ का एक मूल है।

54. सिद्ध करो

$$\sec^4\frac{\pi}{9}+\sec^4\frac{2\pi}{9}+\sec^4\frac{3\pi}{9}+\sec^4\frac{4\pi}{9}=1120.$$

55. सिद्ध करो

$$\frac{1}{4-\sec^2\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{4-\sec^2\frac{4\pi}{7}}+\frac{1}{4-\sec^2\frac{6\pi}{7}}=1.$$

56. सिद्ध करो कि

$$\cot^2\frac{\pi}{11}+\cot^2\frac{2\pi}{11}+\cot^2\frac{3\pi}{11}+\cot^2\frac{4\pi}{11}+\cot^2\frac{5\pi}{11}=15.$$

57. सिद्ध करो कि समीकरण जिसके मूल $\pm 2 \sin \frac{2\pi}{7}$,

$\pm 2 \sin \frac{4\pi}{7}$, $\pm 2 \sin \frac{6\pi}{7}$ है, निम्न है

$$x^6 - 7(x^2-1)^2 = 0.$$

58. समीकरण ज्ञात करो जिसके मूल $\cot\alpha$, $\cot(\alpha + \frac{1}{3}\pi)$, $\cot(\alpha + \frac{2}{3}\pi)$ है तथा

$$\cot\alpha + \cot(\alpha + \tfrac{1}{3}\pi) + \cot(\alpha + \tfrac{2}{3}\pi)$$

का मान ज्ञात करो।

59. सिद्ध करो कि

$$\sum_{0}^{n-1} \cot\left(\alpha + \frac{r\pi}{n}\right) = n \cot n\alpha,$$

तथा दिखाओ कि

$$\sum_{0}^{n-1} \cot^2\left(\alpha + \frac{r\pi}{n}\right) = n(n \operatorname{cosec}^2 n\alpha - 1).$$

60. $\left\{\cos(\theta + i\phi) + i \sin(\theta - i\phi)\right\}^{\alpha + i\beta}$ को $A + iB$ के रूप में व्यक्त करो

61. सिद्ध करो $i^x = \cos k\pi x + i \sin k\pi x$, जहाँ $k = 2n + \frac{1}{2}$.

62. यदि $\tan^{-1}(a+ib) = \sin^{-1}(x+iy)$, तो

$$a^2 + b^2 = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{(x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2 + 1)}}.$$

63. यदि $\sin(x+iy) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, तो सिद्ध करो $r^2 = \frac{1}{2}[\cosh 2y - \cos 2x]$

तथा $\tan\theta = \tanh y \cot x$,

64. यदि $\cos(x+iy) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, तो सिद्ध करो

$$y = \tfrac{1}{2}\log\frac{\sin(x-\theta)}{\sin(x+\theta)}.$$

65. यदि $\tan(x+iy) = i$ तो x तथा y का मान ज्ञात करो।

66. यदि $x = \dfrac{\tan 2\alpha + \tanh 2\beta}{\tan 2\alpha - \tanh 2\beta}$,

तथा $y = \dfrac{\tan\alpha - \tanh\beta}{\tan\alpha + \tanh\beta}$,

तो दिखाओ कि

$$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}(\cot\alpha\coth\beta)$$

निम्न श्रेणियों का योग निकालो

67. $\sin^2\alpha + \sin^2(\alpha+\theta) + \sin^2(\alpha+2\theta) + \ldots + \sin^2(\alpha+n\theta)$.

68. $\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha+\tfrac{1}{2}\pi) + \cos^2(\alpha+\pi) + \ldots + \cos^2(\alpha+\tfrac{1}{2}n\pi)$.

69. $\sin\alpha - \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) \ldots n$ पदों तक।

70. $\sin^3\alpha + \sin^3(\alpha+\beta) + \sin^3(\alpha+2\beta) + n$ पदों तक।

71. दिखाओ कि

$$\tan\frac{n+1}{2}(\pi+\theta) = \frac{\sin\theta - \sin 2\theta + \sin 3\theta - \ldots\ldots\ldots n \text{ पदों तक ।}}{\cos\theta - \cos 2\theta + \cos 3\theta - \ldots\ldots\ldots n \text{ पदों तक ।}}$$

72. सिद्ध करो कि

$$(a + ai\tan\phi)^{\log_e(a\sec\phi) - i\phi}$$ एक वास्तविक संख्या

है तथा उसका मान ज्ञात करो।

73. यदि $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ तथा $c > \sqrt{(a^2+b^2)}$,

दिखाओ कि

$$\theta = (4n+1)\frac{\pi}{2} + i\log_e\frac{c+\sqrt{(c^2-a^2-b^2)}}{\sqrt{(a^2+b^2)}} - \tan^{-1}\frac{a}{b}.$$

यदि n एक धनात्मक पूर्ण संख्या हो तो दिखाओ

74. $n \sin \theta + (n-1) \sin 2\theta + (n-2) \sin 3\theta + \dots + \sin n\theta$

$$= \frac{n+1}{2} \cot \frac{\theta}{2} - \frac{\sin (n+1)\theta}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

75. $(n+1) n \sin \theta + n (n-1) \sin 2\theta + (n-1)(n-2)$

$$\sin 3\theta + \dots + 2.1. \sin n\theta = \frac{n(n+3)}{2} \cot \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{cosec}^3 \frac{\theta}{2} \left\{ \cos \frac{3\theta}{2} - \cos \frac{2n+3}{2} \theta \right\}$$

76. यदि श्रेणी

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots$$

के n पदों का योग s_n हो तो सिद्ध करो

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n} = \tfrac{1}{2} \cot \tfrac{1}{2} x.$$

77. निम्न श्रेणी का n पदों तक योग निकालो

$$\sqrt{(1 + \sin 2\alpha)} + \sqrt{\{1 + \sin 2(\alpha + \beta)\}} + \sqrt{\{1 + \sin 2(\alpha + 2\beta)\}} + \dots$$

78. $\sin\theta \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^2 + 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{\theta}{4}\right)^2 + 4 \sin \frac{\theta}{4} \left(\sin \frac{\theta}{8}\right)^2 + \dots$ n पदों तक.

79. $\cos \frac{\theta}{2} + 2 \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2^2} + 2^2 \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2^2} \cos \frac{\theta}{2^3} + \dots$ n पदों तक.

16

80. निम्न सर्व समिका

$$\sin n\phi = 2^{n-1} \sin\phi \sin(\phi+\alpha) \sin(\phi+2\alpha) \ldots\ldots \sin\{\phi+(n-1)\alpha\},$$

की सहायता से जहाँ $n\alpha=\pi$, दिखाओ कि

$$\tan^{-1}(\cot x \tanh y) + \tan^{-1}\{\cot(x+\alpha)\tanh y\} + \tan^{-1}\{\cot(x+2\alpha)\tanh y\} + \ldots n \text{ पदों तक} = \tan^{-1}(\cot nx \tanh ny)$$

81. एक वर्ग $ABCD$ की भुजा BC को असीमित बढ़ाया और उस पर विन्दु C_1, C_2, C_3,.......आदि ऐसे लिये कि $CC_1=C_1C_2=C_2C_3=\ldots=BC$. यदि कोण BAC_1, BAC_2, BAC_3,.... आदि क्रमशः θ_1, θ_2, θ_3,......आदि हों तो सिद्ध करो

$$\sin\theta_1, \sin\theta_2, \sin\theta_3, \ldots \text{अनंत तक} = 2\sqrt{\left\{\frac{\pi}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\right\}}.$$

महत्त्वपूर्ण सूत्र तथा फल

I. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta,$

$\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta.$

II. $\sin(-\theta) = -\sin\theta$; $\cos(-\theta) = \cos\theta$.

$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$; $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$.

$\sin(90^\circ + \theta) = +\cos\theta$; $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$.

$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$; $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$.

$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$; $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$.

III. यदि $\sin\theta = \sin\alpha$, तो $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$,

यदि $\cos\theta = \cos\alpha$, तो $\theta = 2n\pi \pm \alpha$,

यदि $\tan\theta = \tan\alpha$, तो $\theta = n\pi + \alpha$.

IV. $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B,$

$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B,$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}.$$

$$\tan(A + B + C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A . \tan B \tan C}{1 - \tan B \tan C - \tan C \tan A - \tan A \tan B},$$

V. $$\sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C + D}{2} \cos \frac{C - D}{2}.$$

$$\sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C + D}{2} \sin \frac{C - D}{2}.$$

$$\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C + D}{2} \cos \frac{C - D}{2}.$$

$$\cos C - \cos D = 2 \sin \frac{C + D}{2} \sin \frac{D - C}{2}.$$

VI. $2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$.

$2 \cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$.

$2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$.

$2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$.

VII. $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \dfrac{2 \tan A}{1+\tan^2 A}$.

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$

$= \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$.

$\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1-\tan^2 A}$.

VIII. $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$,

$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$,

$\tan 3A = \dfrac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$.

IX. $\log_a mn = \log_a m + \log_a n$,

$\log_a \dfrac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$,

$\text{Log}_a m^n = n \log_a m$,

$\log_a m = \log_b m \times \log_a b$,

$\log 1 = 0$, $\log_a a = 1$.

X. $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$,

$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

$\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$,

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

$$a = b\cos C + c\cos B,$$

$$b = c\cos A + a\cos C,$$

$$c = a\cos B + b\cos A.$$

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

XI. $$\mathop{\text{Lt}}_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1,$$

$$\mathop{\text{Lt}}_{\theta\to 0}\cos\theta = 1,$$

$$\mathop{\text{Lt}}_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta} = 1.$$

XII. $$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \pi/2,$$

$$\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \pi/2,$$

$$\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x\ \pi/2,$$

$$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy},$$

$$\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy},$$

$$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}.$$

XIII $$(\cos\theta \pm i\sin\theta)^n = \cos n\theta \pm i\sin n\theta.$$

XIV $$\sin n\theta = {}^nC_1\cos^{n-1}\theta\sin\theta - {}^nC_3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \dots\dots\dots,$$

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - {}^nC_2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + {}^nC_4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta - \dots\dots\dots,$$

$$\tan n\theta = \frac{n\tan\theta - {}^nC_3\tan^3\theta + \dots\dots\dots\dots\dots}{1 - {}^nC_2\tan^2\theta + {}^nC_4\tan^4\theta - \dots\dots\dots}.$$

$$\tan(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = \frac{s_1 - s_3 + s_5 - \dots\dots}{1 - s_2 + s_4 - s_6 + \dots\dots}.$$

XV $\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots\dots\dots$ अनंत तक।

$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots\dots\dots$ अनंत तक।

$\tan\alpha = \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{2}{15}\alpha^5 + \dots\dots\dots$ अनंत तक।

XVI $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$

$e^{-ix} = \cos x - i\sin x.$

XVII $\text{Log}(a + ib) = \log_e\sqrt{(a^2 + b^2)} + i(2n\pi + \theta),$

जहां $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$ अर्थात $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$,

$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}.$$

XVIII $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$,

$e^x = \cosh x + \sinh x,$

$e^{-x} = \cosh x - \sinh x.$

$\sin(ix) = i\sinh x$,

$\cos(ix) = \cosh x$,

$\tan(ix) = i\tanh x$.

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,

$\text{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$.

$\coth^2 x - \text{cosech}^2 x = 1$.

$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$.

XIX $\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots\ldots$ अनंत तक

जहाँ $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

$\theta = \tan\theta - \frac{1}{3}\tan^3\theta + \frac{1}{5}\tan^5\theta - \ldots\ldots\ldots\ldots$ अनंत तक

जहाँ $-\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$.

XX $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots\ldots$ n पदों तक

$$= \frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \sin\left\{\alpha + \frac{(n-1)}{2}\beta\right\}.$$

$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots$ n पदों तक

$$= \frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \cos\left\{\alpha - \frac{(n-1)}{2}\beta\right\}.$$

XXI $\sin\theta = \theta\left(1 - \frac{\theta^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\theta^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\theta^2}{3^2\pi^2}\right)$

$\ldots\ldots$ अनंत तक ।

$\cos\theta = \left(1 - \frac{4\theta^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\theta^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\theta^2}{5^2\pi^2}\right)$

$\ldots\ldots\ldots$ अनंत तक ।

$\sinh\theta = \theta\left(1 + \frac{\theta^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{\theta^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{\theta^2}{3^2\pi^2}\right)$

$\ldots\ldots\ldots$ अनंत तक ।

$$\cosh\theta = \left(1+\frac{4\theta^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4\theta^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{4\theta^2}{5^2\pi^2}\right)$$

...... अनंत तक।

XXII $x^{2n}-2a^nx^n\cos n\theta+a^{2n}$

$$=\prod_{r=0}^{n-1}\left\{x^2-2ax\cos\left(\theta+\frac{2r\pi}{n}\right)+a^2\right\},$$

$x^{2n}-2x^n\cos n\theta+1.$

$$=\prod_{r=0}^{n-1}\left\{x^2-2x\left(\theta+\frac{2r\pi}{n}\right)+1\right).$$

$$x^n-1=(x^2-1)\prod_{r=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(x^2-2x\cos\frac{2r\pi}{n}+1\right)$$

जहाँ n एक सम संख्या है।

$$x^n-1=(x-1)\prod_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(x^2-2x\cos\frac{2r\pi}{n}+1\right)$$

जहाँ n एक विषम संख्या है।

$$x^n+1=\prod_{r=0}^{\frac{n}{2}-1}\left\{x^2-2x\frac{(2r+1)}{n}\pi+1\right\}$$

जहाँ n एक सम संख्या है।

$$x^n+1=(x+1)\prod_{r=0}^{\frac{n-3}{2}}\left\{x^2-2x\frac{(2r+1)}{n}\pi+1\right\}$$

जहाँ n एक विषम संख्या है।

पारिभाषिक शब्दावली

अक्ष	axis
अचर	constant
अभिसारी	convergent
अवरोही क्रम	descending order
अन्तर विधि	method of difference
अवकल	differential
अवकल गुणांक	differential coefficient
अवकल समीकरण	differential equation
अवकलन	differentiation
अतिपरवलय	hyperbola
अतिपरवलयिक फलन	hyperbolic function
अनंत	infinity
अपरिमेय	irrational
अपवर्त्य,	multiple
आरगैंड चित्र	Argand diagram
आरोह क्रम	ascending order
आधार	base
आवर्तक	period
आवर्त श्रेणी	recurring series

ऑयलर का प्रमेय	Euler's Theorem
ऑस बॉर्न का नियम	Osborn's Rule
इकाई	Unity
एकक	Unit
एकमान	Single valued
ऋणात्मक	negative
कोट्स	Cotes
कोणांक	amplitude
क्रमागत	consecutive
कोटि	degree (of an equation)
काल्पनिक	imaginary
कारक	operator
ग्रेगरी श्रेणी	Gregory Series
गुणक	coefficient
गुणनखड	factor
गुणोत्तर श्रेणी	geometrical progression (G. P.)
गुणधर्म	properties
घात	degree (of an equation)
घातीय	exponential
घातांक	index
जीवा	chord

डेज श्रेणी	Dase's series
ढ़ाल	slope
द-मायवर	De-Moivre
द्विघात	quadratic
द्विघात समीकरण	quadratic equation
द्विपद प्रमेय	bionomial theorem
दीर्घवृत्त	ellipse
धनात्मक	positive
ध्रुवी निर्देशांक	polar, coordinates
परिधि	circumference
प्रमेय	theorem
परिकेन्द्र	centroid
परम अभिसारी	absolutely convergent
परिमित श्रेणी	finite series
पूर्ण संख्या	integer
प्रतिलोम	inverse
परिमेय	rational
पद	term
फलन	function
वहुभुज	polygon
वहुपद	polynomial
वहुमान	multiple-valued
विन्दुपथ	locus
मापांक	modulus
मूल विन्दु	origin
मुख्य मान	principal, value
मूल	root
मशिन श्रेणी	Machin's series
योग	addition
योगान्तरानुपात	componendo and dividendo
युग्म	couple
रदरफोर्ड श्रेणी	Rutherford's series
राशि	quantity
लवुगुणक (लघु)	logarithm (log)
लेखा चित्र	graph
वृत्त	circle
वृत्तुल फलन	circular function
विस्तार	expansion
व्यंजक	expression
व्यापक	general
व्यापकी कृत	generalised
विषम	odd
वास्तविक	real
व्युत्क्रम	reciprocal
व्यवकलन	subtraction
सदिश	vector
सममित	symmetric
समीकरण	equation
संख्या	number
सीमा	limit
समाकलन	integration
सर्व समिका	identity

सम अतिपरवलय	rectangular hyperbola	सहायक श्रेणी	auxiliary series
सूत्र	formula	स्वेच्छ	arbitrary
सम	even	समानान्तर श्रेणी	arithmetical progression
स्थिरांक	constant	शीर्ष	vertex
सयुग्मी	conjugate	हृदयाभ	cardioid
सम्मिश्र	complex	त्रिज्या	radius
सार्व अनुपात	common ratio		
सार्वअंतर	common difference		